Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Гранд-лига. Третий тур. 22.09.2018

1. Дана клетчатая доска 100×100. *Слоновья тропа* – это последовательность различных клеток, в которой каждые две последовательные клетки имеют ровно одну общую точку. На какое наименьшее количество слоновьих троп можно разбить все клетки доски?

2. Назовём натуральное число *простеньким*, если оно не делится ни на одну из своих ненулевых цифр. Найдите наибольшее возможное количество подряд идущих простеньких чисел.

3. Дана замкнутая n-звенная ломаная $A_1A_2 \dots A_nA_1$ длины d. Круги $D_1, D_2, \dots, D_n$ имеют центры $A_1, \dots, A_n$ соответственно; при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ круги D_i и D_{i+1} не имеют общих внутренних точек (считаем, что $D_{n+1} = D_1$). Докажите, что все эти n кругов можно накрыть одним кругом диаметра d.

4. *Расстоянием* между двумя точками на окружности назовем длину наименьшей дуги между ними. На окружности единичной длины отметили n точек так, что для любого диаметра окружности количества отмеченных точек с разных сторон от этого диаметра отличаются не более, чем на 100. Докажите, что для любой точки окружности сумма расстояний от нее до отмеченных не меньше, чем $n/4 - 25$.

5. Дано натуральное $n > 2$. Петя выбирает вещественные $p_1, \dots, p_n$. Вася хочет найти вещественные $b_1, \dots, b_n$ так, чтобы равенство

$$2017 \min(b_i, b_{i+1}) + 2018 \max(b_i, b_{i+1}) = p_i$$

выполнялось при всех $i = 1, 2, \dots, n$ (мы полагаем $b_{n+1} = b_1$). При каких n Вася всегда сможет выбрать свои числа?

6. Клетчатая фигура, состоящая из конечного числа клеток, называется *связной*, если от любой её клетки до любой другой её клетки можно дойти, переходя каждый раз к соседней по стороне клетке фигуры. Илья и Карина играют в игру на клетчатой плоскости. Сначала Илья выбирает связную клетчатую фигуру. Потом каждым ходом Илья добавляет к фигуре две клетки, а затем Карина удаляет одну клетку. Карина выигрывает, если после некоторого её хода фигура оказалась несвязной. Может ли Илья предотвратить победу Карины?

7. По натуральному числу a определим последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ так, что $a_1 = a$, и a_{n+1} — произведение всех натуральных делителей числа a_n при всех $n = 1, 2, \dots, 2017$. Пусть S — произвольное множество натуральных чисел, не превосходящих 2018. Верно ли, что обязательно можно выбрать число a так, чтобы при всех $n = 1, 2, \dots, 2018$ число a_n являлось точным квадратом тогда и только тогда, когда $n \in S$?

8. Дано натуральное n. Множество V состоит из строк длины n, каждый элемент которых равен -1, 0 или 1. Известно, что никакие три различных строки из V не дают нулевую строку при почленном сложении. Какое наибольшее количество элементов может быть в V?

9. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами таковы, что $P(P(a)) = Q(a)^2$ при всех действительных a. Верно ли, что существует многочлен $R(x)$ с действительными коэффициентами такой, что $P(a) = R(a)^2$ при всех действительных a?

10. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Обозначим через E и F центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Оказалось, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на стороне BC. Чему может быть равен угол BAC?