Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Бои за 5-8 места. 24.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Стороны прямоугольного треугольника — a, b и c — целые числа, причём c — длина гипотенузы. Докажите, что если b — простое число, то $2(b+c)$ — точный квадрат.

2. Рассмотрим натуральное число n. Клетчатый прямоугольник $1 \times n$ всеми возможными способами разбивают на прямоугольники 1×2 и квадраты 1×1, причём каждый квадрат красится в один из 2 цветов (например, при $n = 2$ получается $2^2 + 1$ различных разбиений). Обозначим через t_n количество получаемых разбиений. Докажите, что t_{2n+1} делится на t_n при каждом натуральном n.

3. Попарно различные вещественные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \quad \text{и} \quad ac = bd.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

4. За круглым столом сидят $n \geq 3$ девочек, у каждой из которых есть натуральное число яблок. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок вместе взятых, он забирает у неё одно яблоко и выдаёт по яблоку каждой из её соседок. Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится. (Предполагается, что у учителя неограниченный запас яблок.)

5. Даны три положительных числа x, y, z. Всегда ли существуют такие четыре вещественных числа a, b, c, d, одно из которых равно сумме остальных, что $ad + bc = x$, $ac + bd = y$, $ab + cd = z$?

6. На доске написаны два числа. Играют Саша и Катя. Начинает Саша. За один ход можно вычесть из меньшего числа 2 или вычесть из большего числа 3 (если перед ходом игрока числа равны, то он может из одного из чисел вычесть или 2, или 3). Выигрывает тот, кто первым получит отрицательное число. Кто выиграет, если вначале числа равны 201 и 301?

7. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если в четырёхугольник B_1CA_1M можно вписать окружность, то треугольник ABC — равнобедренный.

8. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$ и $AB+CD = AD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и параллельная основаниям трапеции, пересекает AD в точке F. Чему может быть равен угол $\angle BFC$?

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Бои за 5-8 места. 24.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Стороны прямоугольного треугольника — a, b и c — целые числа, причём c — длина гипотенузы. Докажите, что если b — простое число, то $2(b+c)$ — точный квадрат.

2. Рассмотрим натуральное число n. Клетчатый прямоугольник $1 \times n$ всеми возможными способами разбивают на прямоугольники 1×2 и квадраты 1×1, причём каждый квадрат красится в один из 2 цветов (например, при $n = 2$ получается $2^2 + 1$ различных разбиений). Обозначим через t_n количество получаемых разбиений. Докажите, что t_{2n+1} делится на t_n при каждом натуральном n.

3. Попарно различные вещественные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \quad \text{и} \quad ac = bd.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

4. За круглым столом сидят $n \geq 3$ девочек, у каждой из которых есть натуральное число яблок. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок вместе взятых, он забирает у неё одно яблоко и выдаёт по яблоку каждой из её соседок. Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится. (Предполагается, что у учителя неограниченный запас яблок.)

5. Даны три положительных числа x, y, z. Всегда ли существуют такие четыре вещественных числа a, b, c, d, одно из которых равно сумме остальных, что $ad + bc = x$, $ac + bd = y$, $ab + cd = z$?

6. На доске написаны два числа. Играют Саша и Катя. Начинает Саша. За один ход можно вычесть из меньшего числа 2 или вычесть из большего числа 3 (если перед ходом игрока числа равны, то он может из одного из чисел вычесть или 2, или 3). Выигрывает тот, кто первым получит отрицательное число. Кто выиграет, если вначале числа равны 201 и 301?

7. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если в четырёхугольник B_1CA_1M можно вписать окружность, то треугольник ABC — равнобедренный.

8. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$ и $AB + CD = AD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и параллельная основаниям трапеции, пересекает AD в точке F. Чему может быть равен угол $\angle BFC$?