Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Гранд-лига. Полуфинал. 24.09.2018

1. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, в котором $AB < AC$, а H — ортоцентр треугольника BCI. Точки D и E выбраны на лучах CA и BA соответственно так, что $CD = AB$ и $BE = AC$. Докажите, что точки D, E и H лежат на одной прямой.

2. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на доске написано натуральное число n. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок раскладывает число на доске в сумму попарно различных степеней двойки и заменяет его на любой из полученных показателей (так, если на доске было написано число $134 = 2^7 + 2^2 + 2^1$, то игрок стирает его и пишет взамен одно из чисел 7, 2 или 1). Выигрывает игрок, написавший число 0. Назовём число n *странным*, если в игре, начинающейся с этого числа, выигрывает Вася. Докажите, что существует такое N_0, что при всех $N > N_0$ количество странных натуральных чисел, не превосходящих N, не больше, чем $\dfrac{N}{(\log_2 N)^{2018}}$.

3. Попарно различные вещественные числа a, b, c, d таковы, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a} = 4$ и $ac = bd$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{d}{b}$.

4. У нумизмата есть n монет различных весов, но он не знает, каких. Нумизмат сравнил веса в некоторых парах монет, узнав про каждую пару, какая монета пары тяжелее. Оказалось, что после этого у нумизмата есть единственный способ разложить монеты на две кучи, в каждой из которых он может упорядочить монеты по весу. Более того, при совершении любого взвешивания, результат которого нумизмату ещё неизвестен, единственность разбиения обязательно нарушится. Найдите количество пар монет, про которые нумизмат знает, какая монета в паре тяжелее.

5. Натуральное число называется *палиндромом*, если его десятичная запись читается одинаково справа налево и слева направо (например, числа 121 и 1221 — палиндромы, а 1210 — нет). Существует ли непостоянный многочлен с действительными коэффициентами, принимающий на всех палиндромах простые значения?

6. Бесконечная плоская Земля разбита n прямыми на страны. На Земле идёт война, в ходе которой каждая прямая движется, сохраняя своё направление, с постоянной скоростью — в результате границы стран изменяются, а некоторые страны появляются или исчезают. В некоторый момент историк составил список всех стран, существовавших когда-либо (в частности, существующих на данный момент). Какое наибольшее количество стран могло оказаться в этом списке?

7. Скажем, что бесконечная последовательность неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ является *k-интересной*, если при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнено равенство

$$\sum_{d=0}^{\infty} \max(0, a_{n+d} - d) = k.$$

При каждом натуральном k найдите количество k-интересных последовательностей.

8. Дан неравнобедренный треугольник ABC, вписанный в окружность Ω. На сторонах AB и AC выбраны точки X и Y соответственно так, что $XY \parallel BC$. Окружность ω_1 касается продолжения отрезка XY за точку X в точке S, а также касается отрезка XB и окружности Ω. Аналогично, окружность ω_2 касается продолжения отрезка XY за точку Y в точке T, а также касается отрезка YC и окружности Ω. Докажите, что точки A, T, S и середина дуги BAC лежат на одной окружности.

9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такие, что равенство

$$f(xy + f(y)^2) = f(x)f(y) + yf(y)$$

выполнено при всех $x, y \in \mathbb{R}_+$. (Как обычно, через $\mathbb{R}_+$ обозначено множество всех положительных действительных чисел.)

10. Дано простое p. Назовём натуральное $a < p$ *хорошим*, если при некотором $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$ из десятичной записи числа a/p можно вычеркнуть d первых цифр после запятой так, чтобы получилась десятичная запись некоторого числа вида k/p, где k делится на 10. Докажите, что существует не более $[11p/12] + 12$ хороших чисел.