Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

ПОЛУФИНАЛ. 24.09.18. СТАРТ-ЛИГА

1. На средней линии треугольника ABC, параллельной стороне BC, взята точка D. А на стороне BC треугольника ABC отмечена точка H — основание высоты из вершины A. Оказалось, что $AB = CH$ и $\angle CDH = 90^\circ$. Докажите, что треугольник BCD равнобедренный.

2. При каких $n \geqslant 3$ любой выпуклый n-угольник можно разрезать на несколько выпуклых пятиугольников?

3. Для каждого натурального n клетчатый прямоугольник $1 \times n$ разбивают на фигурки трёх типов: красные квадратики 1×1, зелёные квадратики 1×1 и доминошки 1×2. (Например, при $n = 2$ существует 5 способов разбить прямоугольник: красный–красный, красный–зелёный, зелёный–красный, зелёный–зелёный и доминошка.) Обозначим через t_n количество способов так разбить прямоугольник $1 \times n$. Докажите, что t_{2n+1} делится на t_n при каждом натуральном n.

4. На доске написаны два числа. Играют Саша и Катя. Начинает Саша. За один ход можно вычесть из меньшего числа 2 или вычесть из большего числа 3 (если перед ходом игрока числа равны, то он может из одного из чисел вычесть или 2, или 3). Выигрывает тот, кто первым получит отрицательное число. Кто выиграет, если вначале числа равны 201 и 301?

5. За круглым столом сидят $n \geqslant 3$ девочек, у каждой из которых есть некоторое количество яблок. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок вместе взятых, он забирает у неё одно яблоко и выдаёт по яблоку каждой из её соседок. Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится. (Предполагается, что у учителя неограниченный запас яблок.)

6. Пусть дано натуральное число n. Последовательность $a_1, a_2, \ldots,$ определяется правилом $a_k =$НОК$(k, k+1, \ldots, k+n-1)$. Число n назовем *удачным*, если найдется такое натуральное N, что последовательность $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ возрастает. Найдите все удачные n.

7. Даны три положительных числа x, y, z. Всегда ли существуют такие четыре вещественных числа a, b, c, d, одно из которых равно сумме остальных, что $ad + bc = x$, $ac + bd = y$, $ab + cd = z$?

8. Дано натуральное число $n \geqslant 8$. При каком наибольшем k на доске $n \times n$ можно покрасить k клеток так, чтобы никакие центры четырех покрашенных клеток не являлись вершинами параллелограмма?