Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Полуфинал. 24.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Даны натуральные числа k и $a > k$. Последовательности натуральных чисел $r_1 < r_2 < \dots r_n$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ удовлетворяют условию:

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k).$$

Докажите, что эти последовательности совпадают.

2. Рассмотрим натуральное число n. Клетчатый прямоугольник $1 \times n$ всеми возможными способами разбивают на прямоугольники 1×2 и квадраты 1×1, причём каждый квадрат красится в один из 2018 цветов (например, при $n = 2$ получается $2018^2 + 1$ различных разбиений). Обозначим через t_n количество получаемых разбиений. Докажите, что t_{2n+1} делится на t_n при каждом натуральном n.

3. Попарно различные вещественные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \quad \text{и} \quad ac = bd.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

4. За круглым столом сидят $n \geq 3$ девочек, у каждой из которых есть натуральное число яблок. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок вместе взятых, он отбирает у неё два яблока и отдает по яблоку каждой из её соседок (если у девочки было только одно яблоко, то он передаёт его любой из её соседок). Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится.

5. Натуральное число называется *палиндромом*, если его десятичная запись читается одинаково справа налево и слева направо (например, числа 121 и 1221 — палиндромы, а 1210 — нет). Существует ли непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, принимающий на всех палиндромах простые значения?

6. На доске написаны два числа. Играют Саша и Катя. Начинает Саша. За один ход можно вычесть из меньшего числа 2 или вычесть из большего числа 3 (если перед ходом игрока числа равны, то он может из одного из чисел вычесть или 2, или 3). Выигрывает тот, кто первым получит отрицательное число. Кто выиграет, если вначале числа равны 201 и 301?

7. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если в четырёхугольник B_1CA_1M можно вписать окружность, то треугольник ABC — равнобедренный.

8. В остроугольном треугольнике ABC, вписанном в окружность с центром O проведены высоты AD, BE и CF. Докажите, что отрезки OA, OB, OC, OD, OE, OF разрезают треугольник ABC на три пары равновеликих треугольников.

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Полуфинал. 24.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Даны натуральные числа k и $a > k$. Последовательности натуральных чисел $r_1 < r_2 < \dots r_n$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ удовлетворяют условию:

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k).$$

Докажите, что эти последовательности совпадают.

2. Рассмотрим натуральное число n. Клетчатый прямоугольник $1 \times n$ всеми возможными способами разбивают на прямоугольники 1×2 и квадраты 1×1, причём каждый квадрат красится в один из 2018 цветов (например, при $n = 2$ получается $2018^2 + 1$ различных разбиений). Обозначим через t_n количество получаемых разбиений. Докажите, что t_{2n+1} делится на t_n при каждом натуральном n.

3. Попарно различные вещественные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \quad \text{и} \quad ac = bd.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

4. За круглым столом сидят $n \geq 3$ девочек, у каждой из которых есть натуральное число яблок. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок вместе взятых, он отбирает у неё два яблока и отдает по яблоку каждой из её соседок (если у девочки было только одно яблоко, то он передаёт его любой из её соседок). Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится.

5. Натуральное число называется *палиндромом*, если его десятичная запись читается одинаково справа налево и слева направо (например, числа 121 и 1221 — палиндромы, а 1210 — нет). Существует ли непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, принимающий на всех палиндромах простые значения?

6. На доске написаны два числа. Играют Саша и Катя. Начинает Саша. За один ход можно вычесть из меньшего числа 2 или вычесть из большего числа 3 (если перед ходом игрока числа равны, то он может из одного из чисел вычесть или 2, или 3). Выигрывает тот, кто первым получит отрицательное число. Кто выиграет, если вначале числа равны 201 и 301?

7. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если в четырёхугольник B_1CA_1M можно вписать окружность, то треугольник ABC — равнобедренный.

8. В остроугольном треугольнике ABC, вписанном в окружность с центром O проведены высоты AD, BE и CF. Докажите, что отрезки OA, OB, OC, OD, OE, OF разрезают треугольник ABC на три пары равновеликих треугольников.