Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2018
Премьер-лига. 4 тур. 24.09.18

1. *Палиндром* – это натуральное число, которое не меняется, если записать его цифры в обратном порядке (например, 13031, 6116 или 22). Существует ли непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого палиндрома x число $P(x)$ – простое?

2. Даны три положительных числа x, y, z. Всегда ли существуют такие четыре вещественных числа a, b, c, d, одно из которых равно сумме остальных, что $ad+bc=x$, $ac+bd=y$, $ab+cd=z$?

3. Даны натуральные числа k и $a>k$. Последовательности натуральных чисел $r_1<r_2<\ldots r_n$, $s_1<s_2<\ldots<s_n$ удовлетворяют условию:

$$(a^{r_1}+k)(a^{r_2}+k)\ldots(a^{r_n}+k)=(a^{s_1}+k)(a^{s_2}+k)\ldots(a^{s_n}+k).$$

Докажите, что эти последовательности совпадают.

4. За круглым столом сидят $n\geqslant 3$ девочек, у каждой из которых есть хотя бы одно яблоко. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок, вместе взятых, он забирает у неё два яблока и выдаёт по яблоку каждой из её соседок. Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, в которой $AB+CD=AD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и параллельная основаниям трапеции, пересекает AD в точке F. Чему может быть равен угол $\angle BFC$?

6. Для каждого натурального n клетчатый прямоугольник $1\times n$ разбивают на фигурки трёх типов: красные квадратики 1×1, зелёные квадратики 1×1 и доминошки 1×2. (Например, при $n=2$ существует 5 способов разбить прямоугольник: красный–красный, красный–зелёный, зелёный–красный, зелёный–зелёный и доминошка.) Обозначим через t_n количество способов так разбить прямоугольник $1\times n$. Докажите, что t_{2n+1} делится на t_n при каждом натуральном n.

7. В треугольнике ABC сторона AB короче стороны AC. Точки D и E расположены на прямых CA и BA соответственно так, что $CD=AB$, $BE=AC$, и A, D и E лежат по одну сторону от BC. I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а H – ортоцентр треугольника BCI. Докажите, что точки D, E и H лежат на одной прямой.

8. Дан граф на 100 вершинах с k рёбрами. Барон и Мута играют в следующую игру. Барон выбирает в графе две вершины A и B и ставит в A фишку. После этого каждым ходом сначала Мута передвигает фишку не более чем по двум рёбрам, а потом Барон стирает одно ребро. При каком наименьшем k Мута заведомо сможет поставить фишку в B?