Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Гранд-лига. Финал. 25.09.2018

1. Изначально N неотрицательных целых чисел расставлены в вершинах связного графа, в котором не меньше 3 вершин; сумма этих чисел равна $2N$. Вася и Петя ходят по очереди. За ход сначала Вася вычитает 3 из одного числа (при этом нельзя получать отрицательное число), а затем Петя прибавляет по 1 к какому-то числу и двум из его соседей. Петя выигрывает, если Вася не может сделать очередной ход. Для каких связных графов с не менее чем 3 вершинами у Пети есть выигрышная стратегия при любой начальной расстановке чисел?

2. Таблица $n \times n$ заполнена положительными числами; в клетке (i, j) стоит число $a_{i,j}$. Оказалось, что для любых индексов i и j верно равенство $a_{i,j}a_{j,i} = 1$. Обозначим через S_i сумму чисел в i-й строке. Докажите что $\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dots + \dfrac{1}{S_n} \leqslant 1$.

3. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. На стороне BC выбраны точки M и N так, что N лежит между B и M. Отрезки AM и DN пересекаются в точке P. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности с центрами S_1, S_2, S_3 и S_4 соответственно. Докажите, что точки S_1, S_2, S_3 и S_4 лежат на одной окружности.

4. В клетках доске $n \times n$ расставлено n^2 фишек нескольких цветов (по одной в каждой клетке) так, что в каждой строке все фишки разноцветны. Докажите, что можно так переставить фишки в каждой строке, чтобы и в каждом столбце все фишки стали разноцветными.

5. В круговом волейбольном турнире участвовали профессиональные и любительские команды; каждые две команды сыграли по разу. Оказалось, что каждая профессиональная команда выиграла хотя бы у 21 любительской, а каждая любительская — хотя бы у 12 профессиональных. Найдите наименьшее возможное количество команд в таком турнире.

6. В каждой клетке таблицы 100×100 стоит цифра. Читая цифры по строчкам слева направо и по столбцам сверху вниз, получили 200 стозначных чисел. Может ли оказаться, что ровно 199 из этих чисел кратны 2017?

7. Дан треугольник ABC, в котором $AB < BC < CA$. Вневписанные окружности касаются сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Через точки A_1, B_1 и C_1 проведена окружность, которая вторично пересекает стороны BC, CA и AB в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. На какой из сторон треугольника может лежать наибольший из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2?

8. Окружность разбита на $2n$ равных дуг. Вася помечает две дуги числом 1, две — числом 2, …, две — числом n. Затем для каждых двух дужек с одинаковыми номерами он рассматривает выпуклую «полоску», ограниченную этими дугами и двумя отрезками, соединяющими их концы. Найдите количество способов пометить дуги, при которых рассмотренные n полосок покроют единичный круг.

9. При каких натуральных $n > 2$ существуют набор из n натуральных чисел $a_1, \dots, a_n$ и натуральное число d такие, что для любых трёх различных индексов i, j, k число a_ia_j даёт остаток d при делении на a_k?

10. Для натурального $n > 2$ обозначим через S_n множество всех натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Определим многочлен $Q_n(x)$ как

$$Q_n(x) = \sum_{i \in S_n} x^{i-1}.$$

Найдите все натуральные $n > 2$, для которых многочлен $Q_n(x)$ не раскладывается в произведение двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.