Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2018
Премьер-лига. Финал. 25.09.18

1. Натуральные числа x и y обладают следующим удивительным свойством: $(ax+by)^2+$ $+(bx+ay)^2$ кратно $a+b$ при любых натуральных a и b. Докажите, что $x=y$.

2. В графе на 20 вершинах при удалении любого набора вершин (хотя бы одной) останется вершина, смежная со всеми оставшимися, кроме, быть может, одной. При каком наибольшем k в любом таком графе найдутся k попарно смежных вершин?

3. Вещественные числа x, y, z таковы, что числа

$$\frac{1}{|x^2+2yz|},\quad \frac{1}{|y^2+2zx|},\quad \frac{1}{|z^2+2xy|}$$

являются сторонами некоторого невырожденного треугольника. Докажите, что $xy+yz+zx \neq 0$.

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ сторона AB – большее основание. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а J – центр вневписанной окружности треугольника ACD, касающейся стороны AD и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямые IJ и AB параллельны.

5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Точка T симметрична C относительно O, а точка T' симметрична T относительно AB. Прямая BT' пересекает меньшую дугу AC окружности ω в точке R. Перпендикуляр к CT, восставленный в точке O, пересекает прямую AC в точке L. N – точка пересечения прямых TR и AC. Докажите, что $CN=2AL$.

6. В каждой клетке таблицы 20×20 стоит цифра. Читая цифры по строчкам слева направо и по столбцам сверху вниз, получили 40 двадцатизначных чисел. Может ли оказаться, что ровно 39 из этих чисел кратны 2017?

7. Решите в натуральных числах $x>1$, y и z уравнение $(z+2)^x-2^y=(z-2)^x+2^y$.

8. Числа 1, 2, …, 100 раскрашены в три цвета. Докажите, что существуют два различных числа одного цвета, разность которых – точный квадрат.