Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

ФИНАЛ. 25.09.18. СТАРТ-ЛИГА

1. Внутри треугольника ABC лежит точка D. Укажите (постройте циркулем и линейкой) на плоскости точку X, для которой сумма расстояний $XA + XB + XC + XD$ принимает наименьшее значение.

2. На плоскости даны точки A и B на расстоянии 2 друг от друга. Рассматриваются выпуклые пятиугольники $ABXYZ$, лежащие по одну сторону от AB и такие что: $BX = AZ = 1$, $\angle BXY = \angle XYZ = \angle YZA = 90^\circ$. Докажите, что биссектрисы всевозможных углов XYZ проходят через фиксированную точку.

3. Дана белая клетчатая доска $n \times n$. При каких натуральных k после покраски любых k клеток доски в чёрный цвет, её можно разрезать по линиям сетки на k прямоугольников так, что в каждом прямоугольнике будет ровно одна чёрная клетка?

4. Дано натуральное $n \geqslant 10$. На шахматные сборы приехало $2n$ шахматистов. Каждый день выбирают n шахматистов и среди них проводят однокруговой турнир. Какое минимальное число дней должны идти сборы, если за их время каждый шахматист должен сыграть с каждым хотя бы одну партию?

5. В каждой клетке таблицы 20×20 стоит цифра. Читая цифры по строчкам слева направо и по столбцам сверху вниз, получили 40 двадцатизначных чисел. Может ли оказаться, что ровно 39 из этих чисел кратны 2017?

6. На доске написано число 1. Разрешается производить с числом одну из следующих операций:
1) умножить число на 100;
2) вычеркнуть две одинаковые цифры (но так, чтобы на доске оставалось натуральное число, т.е. ноль в начале числа недопустим);
3) прибавить к числу модуль разности некоторых двух его цифр.

Можно ли после нескольких таких операций получить на доске число 10?

7. Можно ли отметить на плоскости 2018 различных точек так, чтобы все попарные расстояния между ними, кроме одного, были натуральными числами?

8. Натуральные числа x и y обладают следующим удивительным свойством: $(ax + by)^2 + (bx + ay)^2$ кратно $a + b$ при любых натуральных a и b. Докажите, что $x = y$.