Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Финал. 25.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. В равнобокой трапеции $ABCD$ сторона AB — большее основание. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а J — центр вневписанной окружности треугольника ACD, касающейся стороны AD. Докажите, что прямые IJ и AB параллельны.

2. Множество M состоит из n натуральных чисел. Докажите, что количество пар различных чисел из M, среднее арифметическое которых также принадлежит M, не превосходит $\frac{1}{4}(n-1)^2$.

3. На Южном турнире n школьников. Для данного натурального t известно, что при любом выборе команды из $2t$ человек среди них найдётся кто-то, знакомый со всеми остальными членами команды. Докажите, что на турнире найдётся $n-2t+1$ детей, каждый из которых знает всех остальных участников турнира.

4. Действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенству

$$a^2+b^2+ab+ac+bc<0.$$

Докажите, что $a^2+b^2<c^2$.

5. Таблица заполняется цифрами. По ней строятся числа: в каждой строке получается одно число при прочтении слева направо; в каждом столбце — сверху вниз. Найдутся ли таблица и число k, взаимно простое с 10, такие, что одно из прочитанных чисел не делится на k, а все остальные — делятся?

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Точка T симметрична C относительно O, а точка T' симметрична T относительно AB. Прямая BT' пересекает меньшую дугу AC окружности ω в точке R. Перпендикуляр к CT, опущенный из точки O, пересекает прямую AC в точке L. Пусть N — точка пересечения прямых TR и AC. Докажите, что $CN=2AL$.

7. Натуральные числа x и y таковы, что $(ax+by)^2+(bx+ay)^2$ кратно $a+b$ при любых натуральных a и b. Докажите, что $x=y$.

8. Числа $1, 2, \ldots, 100$ раскрашены в три цвета. Докажите, что существуют два различных числа одного цвета, разность которых — точный квадрат.

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Финал. 25.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. В равнобокой трапеции $ABCD$ сторона AB — большее основание. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а J — центр вневписанной окружности треугольника ACD, касающейся стороны AD. Докажите, что прямые IJ и AB параллельны.

2. Множество M состоит из n натуральных чисел. Докажите, что количество пар различных чисел из M, среднее арифметическое которых также принадлежит M, не превосходит $\frac{1}{4}(n-1)^2$.

3. На Южном турнире n школьников. Для данного натурального t известно, что при любом выборе команды из $2t$ человек среди них найдётся кто-то, знакомый со всеми остальными членами команды. Докажите, что на турнире найдётся $n-2t+1$ детей, каждый из которых знает всех остальных участников турнира.

4. Действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенству

$$a^2+b^2+ab+ac+bc<0.$$

Докажите, что $a^2+b^2<c^2$.

5. Таблица заполняется цифрами. По ней строятся числа: в каждой строке получается одно число при прочтении слева направо; в каждом столбце — сверху вниз. Найдутся ли таблица и число k, взаимно простое с 10, такие, что одно из прочитанных чисел не делится на k, а все остальные — делятся?

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Точка T симметрична C относительно O, а точка T' симметрична T относительно AB. Прямая BT' пересекает меньшую дугу AC окружности ω в точке R. Перпендикуляр к CT, опущенный из точки O, пересекает прямую AC в точке L. Пусть N — точка пересечения прямых TR и AC. Докажите, что $CN=2AL$.

7. Натуральные числа x и y таковы, что $(ax+by)^2+(bx+ay)^2$ кратно $a+b$ при любых натуральных a и b. Докажите, что $x=y$.

8. Числа $1, 2, \ldots, 100$ раскрашены в три цвета. Докажите, что существуют два различных числа одного цвета, разность которых — точный квадрат.