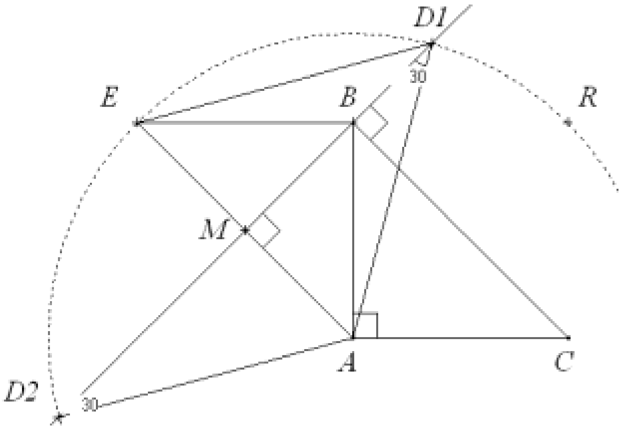
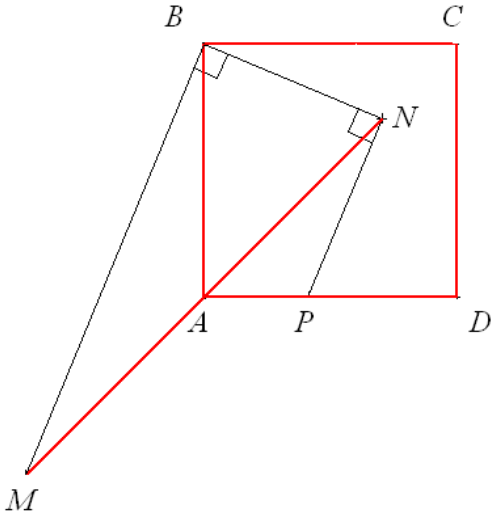
XV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XII Турнир математических игр.
Игра «Домино». ***Младшая лига (7-9 класс).*** **Решения. 11.09.2019.**

0–0. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Точка D на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно BC, такова, что $AD = BC$. Чему может быть равен угол BAD? (***Комментарий:*** *При решении задачи хорошо работает метод «идеального» построения, дающий быстрое построение чертежа с помощью параллелограмма ACBE (см. чертёж).* **15° и 105°. Заметим, что существуют 2 положения точки *D* (см. рис.), где D_1 лежит по одну стороны с *C* от прямой *AB*, а D_2 – по другую сторону. Рассмотрим параллелограмм *ACBE* (см. рис), тогда середина *M* стороны *AE* лежит на прямой *BD*, значит, в прямоугольных треугольниках MAD_1 и MAD_2 катет *AM* равен половине гипотенузы AD_1 и AD_2 соответственно. Тогда $\angle MD_1A=30°$, $\angle MD_2A=\angle MD_1A=30°$ (в силу равнобедренности треугольника AD_1D_2). $\angle BAD_1=180°–\angle ABD_1–\angle BD_1A=180°–(45°+90°)–30°=15°$, $\angle BAD_2=180°–\angle BD_2A–\angle ABD_2= 180°–30°–45°=105°$.)**



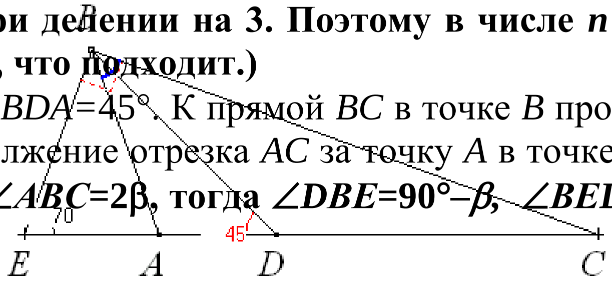
0–1. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка N, а на продолжении диагонали AC за точку A — точка M. Известно, что $AB = AM$ и $\angle MBN = 90°$. На стороне AD отмечена точка P так, что $\angle PNB = 90°$. Найдите $\angle NPD$. (**67,5°. В прямоугольном треугольнике *MBN* на гипотенузе *MN* есть такая точка *A*, что *AB=AM*, значит, *A* – середина гипотенузы, *AN=AB=AD*. Тогда в равнобедренном треугольнике *ABN* $\angle BAN=45°$, $\angle BNA=(180°–45°)/2=67{,}5°$, значит, $\angle ANP=\angle BNP–\angle BNA=90°–67{,}5°=22{,}5°$, $\angle NPD=\angle NAP+\angle ANP=45°+22{,}5°=67{,}5°$.)**



0–2. Расставьте все целые числа от 1 до 10 в строку в таком порядке, чтобы сумма любых двух подряд стоящих чисел (кроме суммы двух последних) делилась на следующее за ними число. **(например, 2, 4, 6, 10, 8, 1, 9, 5, 7, 3)**

0–3. Найдите наибольшее натуральное число со свойством: ни оно само, ни любое из чисел, полученное из него вычёркиванием любого набора цифр (не всех), не делится на 3. **(88. Пусть *n* – искомое натуральное число. Его десятичная запись в силу условия не должна содержать цифр 3, 6, 9, 0. В силу признака делимости на три среди его цифр нет трёх, дающих один и тот же остаток от деления на 3, в частности, нет трёх одинаковых. Не может быть среди них также двух цифр, имеющих разные ненулевые остатки при делении на 3. Поэтому в числе *n* не более двух цифр, и тогда оно не более 88, что подходит.)**

0–4. BD — биссектриса треугольника ABC. $\angle BDA=45°$. К прямой BC в точке B провели перпендикуляр, который пересек продолжение отрезка AC за точку A в точке E. $\angle BEC=70°$. Найдите $\angle ABC$. (**50°. Пусть $\angle ABC=2\beta$, тогда $\angle DBE=90°–\beta$, $\angle BED$ =**



$180°-\angle BDE-\angle DBE = 180°-45°-(90°-\beta) = \beta+45°=70°$, откуда $\beta=25°$, $\angle ABC=2\beta=50°$.)

0–5. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске 100×100 так, чтобы каждая отмеченная клетка граничила по стороне не более, чем с одной отмеченной клеткой? **(<u>5000 отмеченных клеток</u>. Разобьём доску на 2500 квадратов 2×2, в каждом из которых будет не более двух отмеченных клеток, иначе найдётся уголок из трёх отмеченных клеток, центральная из которых будет граничить по стороне уже с двумя отмеченными клетками. Значит, отмеченных клеток не более 2·2500=5000. В качестве примера на 5000 отмеченных клеток подойдёт шахматная раскраска (отмеченные и неотмеченные клетки).)**

0–6. При каких $n > 50$ можно расставить по окружности n попарно различных чисел таким образом, чтобы каждое число было либо больше всех 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке? **(<u>При $n\geq100$</u>. Упорядочим числа по возрастанию $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$. Расставим при $n\geq100$ числа по часовой стрелке в следующем порядке a_1, a_2, a_3, …, a_{50}, a_n, a_{n-1}, …, a_{51}. Тогда каждое из чисел от 1-го до 50-го будет меньше следующих 50-ти чисел, а каждое из чисел от 51-го до n-го будет больше следующих 50-ти чисел. Заметим, что при $n\leq99$ для 50-го числа будет только 49 чисел, меньших его, и $n-50\leq99-50=49$ чисел, больших его, значит, для a_{50} невозможно выполнить требуемое условие.)**

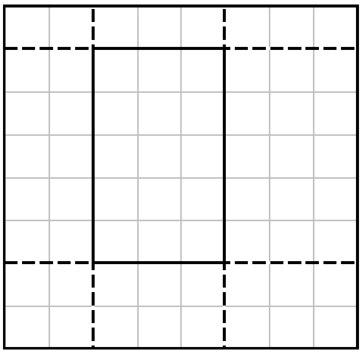
1–1. Решите уравнение $[x^2]=2019$, где $[t]$ – наибольшее целое число, которое не превосходит t (целая часть числа t). **(Уравнение равносильно неравенству $2019\leq x^2<2020$, откуда $\underline{x\in\left(-\sqrt{2020}\,;\,-\sqrt{2019}\,\right]\cup\left[\sqrt{2019}\,;\,\sqrt{2020}\,\right)}$.)**

1–2. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных? **(<u>В 13/11 раза</u>. За полсуток на обычных часах минутная стрелка делает 12 оборотов, часовая – 1, значит, минутная догонит часовую стрелку ровно 12–1=11 раз. За полсуток на шуточных часах минутная стрелка делает 12 оборотов против часовой стрелки, часовая – 1 оборот по часовой стрелке, значит, минутная встретит часовую стрелку 12+1=13 раз (на каждом обороте по 1 разу и в конце 12-го оборота ещё раз). Значит, стрелки встречаются в 13/11 раза чаще в шуточных часах, чем в обычных.)**

1–3. На доске написано N натуральных чисел, одно из которых — 2019. Известно, что для любых двух чисел, записанных на доске, на ней записан также модуль их разности. При каком наибольшем N все числа, записанные на доске, гарантированно делятся на 2019? **(<u>2</u>. Упорядочим наши числа, они все будут различными, т.к. модуль разности любых двух чисел записан на доске, а на ней только натуральные числа. $a_1<a_2<\ldots<a_N$. Тогда $a_2-a_1=a_1$, т.е. $a_2=2a_1$; a_3-a_1 будет больше $a_2-a_1=a_1$ и будет меньше a_3, значит, $a_3-a_1=a_2=2a_1$, т.е. $a_3=3a_1$, далее аналогичными рассуждениями по индукции получим, что все $a_n=n\cdot a_1$ при натуральных n от 1 до N. При этом одно из чисел $a_n=n\cdot a_1$ равно 2019. Если $N\geq3$, то могло оказаться, что $a_3=3\cdot673=2019$, но $a_1=673$ не делится на 2019. При $N=2$ у нас есть только два числа $a_2=2a_1$ и a_1, одно из которых равно 2019, но это возможно только при $a_1=2019$. Значит, оба числа будут кратны 2019, т.е. ряд из двух чисел нам подходит.)**

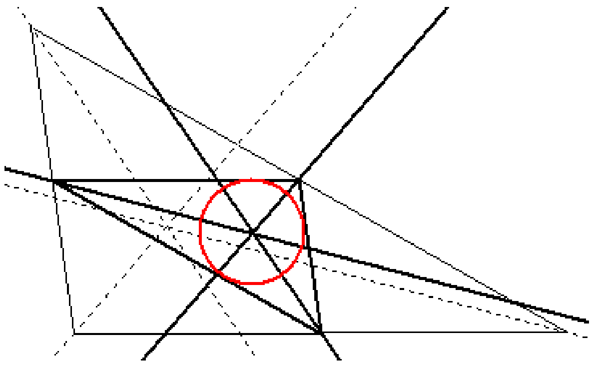
1–4. Имеются четыре числа, сумма которых равна 4. Известно, что сумма любых трёх из них неотрицательна. Какое наименьшее значение может принимать наименьшее из этих чисел? *Приведите ответ и пример.* **(<u>–8, например, при наборе (–8, 4, 4, 4)</u>. Упорядочим наши числа $a \le b \le c \le d$, тогда $a+b+c+d=4$, значит, $d\le4$, т.к. $a+b+c\ge0$. Тогда $a \ge -b-c \ge -d-d = -2d\ge-8$.)**

1–5. Шахматную доску по клеткам разрезают на пять прямоугольников так, чтобы один из них не содержал клеток на краю доски. Сколькими различными способами это можно сделать? **(<u>7056</u>. Раз один из прямоугольников не выходит на край, то остальные 4 прямоугольника обязательно содержат в себе по одному из 4 прямоугольных кусков между центральным прямоугольником и границей квадрата (см. рис.). Остаются ещё 4 угловых прямоугольных зоны, каждая из которых может быть отнесена к одному из двух крайних прямоугольников, т.е. всего 2^4 способов их распределить. Центральный же прямоугольник определяется выбором двух вертикальных линий из 7 возможных и двух горизонтальных линий из 7 возможных, значит, всего существует $2^4 \cdot (C_7^2)^2 = 7056$ вариантов разрезания.)**



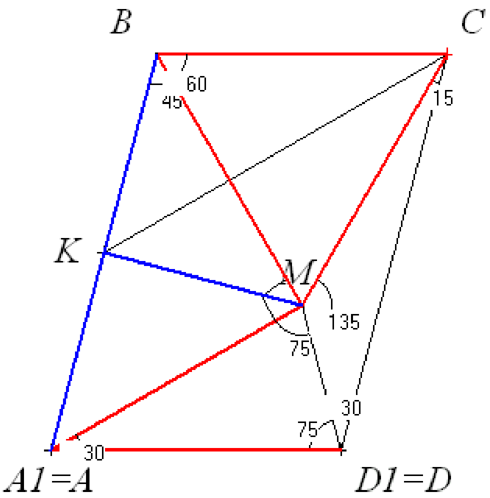
1–6. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (причём есть и те, и другие, всего не менее трёх человек). Каждый сидящий за столом заявил, что оба его соседа лжецы. При этом оказалось, что теперь количество рыцарей можно определить однозначно. Сколько человек могло сидеть за столом? **(<u>3, 4, 5, 7</u>. Заметим, что рядом с рыцарем (Р) сидят два лжеца (Л), а рядом с лжецом – хотя бы один рыцарь, тогда весь стол разбивается на группы РЛ и РЛЛ. Пусть всего k рыцарей, тогда будет и k групп. Выполняется неравенство $2k\le N\le3k$, где N – количество всех людей. Из него получаем, что $N/3\le k\le N/2$.Т.к. k определяется однозначно, то в промежуток $[N/3; N/2]$ должно попадать ровно одно натуральное число, т.е. $N/2-N/3=N/6$ должно быть меньше 2, а значит, $N<12$. Перебрав все варианты для N от 3 до 11, получим, что подходят только 3, 4, 5, 7 (а в этих случаях рыцари есть и их количество соответственно равно 1, 2, 2 и 3).)**

2–2. Как известно, три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке. Центром какой окружности будет эта точка? **(<u>Это центр вписанной окружности серединного треугольника</u>. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан исходного треугольника ABC и коэффициентом (–1/2) треугольник переходит в треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника. При этом прямые, содержащие биссектрисы исходного треугольника, переходят в параллельные им прямые, проходящие через середины сторон треугольника, т.е. в биссектрисы серединного треугольника, которые пересекаются в точке, являющейся центром вписанной окружности.)**



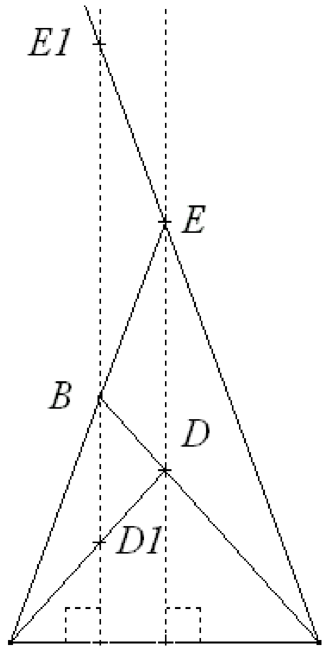
2–3. При каких натуральных $n\geq 3$ можно разложить $n(n-1)/2$ карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до $n(n-1)/2$, в n стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках было по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами $n(n-1)/2$ и 1? **(<u>При нечётных $n\geq 3$</u>. Предположим, что нам удалось разложить нужным образом карточки в n стопок. Рассмотрим граф, в котором вершины – стопки, а рёбра между вершинами показывают наличие последовательных номеров в этих стопках. Заметим, что у нас ровно $n(n-1)/2$ пар (с учётом пары $n(n-1)/2$) и 1 последовательных номеров, и ровно $C_n^2=\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$ пар стопок, значит, наш полный граф должен оказаться ещё и эйлеровым, т.к. последовательные пары дают обход по каждому ребру ровно один раз. Эйлеровость в этом связном графе возможна только тогда, когда будет не более двух нечётных вершин. Заметим, что степень каждой вершины равна $(n-1)$ и будет чётной при нечётном n, а нечётной при чётном n. При нечётных степенях мы имеем не более двух нечётных вершин только при $n=2$, что не удовлетворяет условию. При всех же чётных степенях (при нечётном n) у нас согласно критерию эйлеровости есть эйлеров цикл, который и даст нам порядок укладывания карточек в стопки.)**

2–4. Точка M внутри параллелограмма $ABCD$ с углом $\angle A = 75°$ такова, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Найдите $\angle BKC$, где K – середина стороны AB. **(<u>45°</u>. Построим во внешнюю сторону на стороне BM равностороннего треугольника BMC равнобедренный прямоугольный треугольник BMA_1 с прямым углом M, а затем на стороне A_1M этого треугольника во внешнюю сторону построим равнобедренный треугольника MA_1D_1 с $\angle MA_1D_1=30°$, $\angle A_1MD_1=\angle A_1D_1M=75°$ (см рис.). Тогда $\angle A_1BC=45°+60°=105°$, $\angle BA_1D_1=45°+30°=75°=180°-105°$, значит, отрезки BC и A_1D_1 параллельны, кроме того они равны по длине, значит, A_1BCD_1 – параллелограмм, у которого лучи BA_1 и CD_1 совпадают с лучами BA и CD. $\angle CMD_1=360°-60°-90°-75°=135°$, значит, луч MD_1 совпадает с лучом MD, а его точкой пересечения с лучом CD_1, совпадающим с лучом CD, должна быть точка $D=D_1$. Следовательно, параллелограмм A_1BCD_1 совпадает с исходным параллелограммом $ABCD$, значит, середина K стороны AB параллелограмма $ABCD$ является серединой гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABM. Тогда $KM=KB$, $\angle BKM=90°$, значит, $BCMK$ – дельтоид ($KB=BM$, $CB=CM$), следовательно, KC – биссектриса $\angle BKM=90°$, откуда $\angle BKC=90°/2=45°$.)**

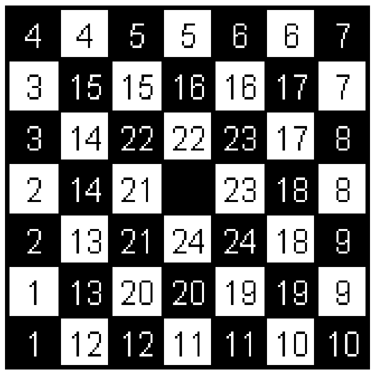


2–5. Решите в натуральных числах уравнение $(a+b+c)^2/3 = a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)$. **(<u>$a=n$, $b=n+2$, $c=n+1$, где n – любое натуральное число</u>. Преобразуем правую часть $a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)=(a+1)^2+(b-1)^2+c^2$ и сделаем замены $a+1=x$, $b-1=y$, $c=z$, тогда $a+b+c=(a+1)+(b-1)+c=x+y+z$ и для нашего равенства после умножения на 3 по-**

лучим цепочку равносильных равенств $(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2)$ $\Leftrightarrow$ $2(xy+yz+zx)=2(x^2+y^2+z^2)$ $\Leftrightarrow$ $0=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$, откуда $x=y=z$. Тогда $a=n$, $b=n+2$, $c=n+1$, где n – любое натуральное число.)



2–6. BH – высота остроугольного треугольника ABC. На стороне BC выбрана точка D, а на продолжении стороны AB за точку B — точка E, причём $AD = DC$ и $AE = EC$. Прямые AD и CE пересекают прямую BH в точках D_1 и E_1 соответственно. Какие значения может принимать отношение $D_1E_1 : DE$? **(<u>2</u>. В силу равенств $AD = DC$ и $AE = EC$ точки D и E лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC, который параллелен высоте BH. Тогда в силу подобия пар треугольников ABD_1 и AED, ABH и AEM, CED и CE_1B, CDM и CBH (M – середина AC) имеем: $\dfrac{D_1B}{DE}=\dfrac{AD_1}{AD}=\dfrac{AH}{AM}$, $\dfrac{BE_1}{DE}=\dfrac{CB}{CD}=\dfrac{CH}{CM}$, тогда $\dfrac{D_1E_1}{DE}=\dfrac{D_1B+BE_1}{DE}=\dfrac{AH}{AM}+\dfrac{CH}{CM}=\dfrac{AH+CH}{AC/2}=\dfrac{AC}{AC/2}=2$.)**



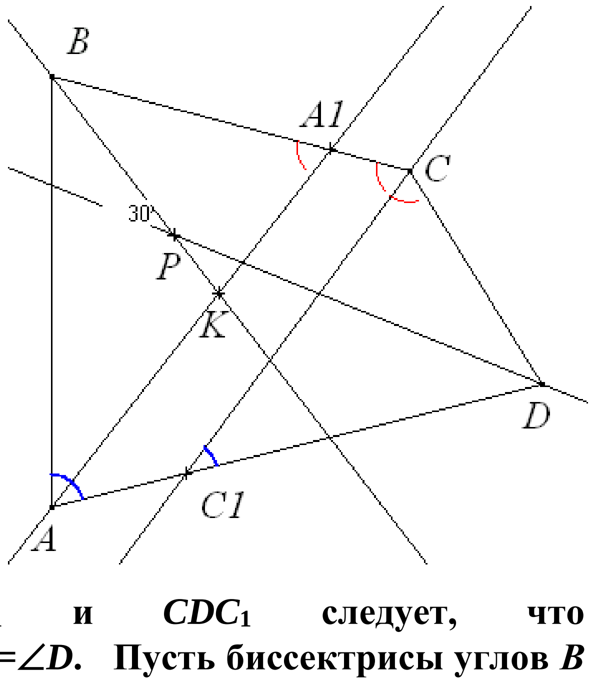
3–3. Имеется клетчатая доска $n\times n$, где $n\geq 2$. Двое играют в следующую игру: первый своим ходом ставит фишку в произвольную клетку доски по своему выбору, а потом передвигает её в одну из соседних по стороне клеток. Далее они по очереди, начиная со второго, передвигают фишку в одну из соседних по стороне клеток, при этом нельзя ставить фишку туда, где она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n при правильной игре выигрывает второй? **(<u>Ни при каких</u>. При чётных n первый разобьёт все клетки на доминошки 1×2 (например, горизонтально) и каждым свои ходом будет закрывать парную клетку доминошки (в начале сразу закроет доминошку, а потом будет отвечать таким ходом на ход второго). При нечётных n первый разобьёт все клетки на пары, например, по спирали (см. рис. при $n=7$), кроме центральной, и также начнёт закрывать парные клетки доминошек, но с одним замечанием. Он раскрасит клетки в шахматном порядке так, чтобы все угловые клетки были чёрными, и поставит изначально фишку в белую клетку любой доминошки, закрыв затем парную клетку этой доминошки. При этой стратегии первый всегда сможет ответить на ход второго, при этом в нечётном случае второй не сможет сходить в центральную клетку, т.к. она будет чёрной, а второй ходит только по белым клеткам. Тогда в силу конечного числа ходов рано или поздно второй не сможет сходить, он и проиграет.)**

3–4. Неотрицательные числа x, y, z, t удовлетворяют условию $|x-y|+|y-z|+|z-t|+|t-x| = 4$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $x^2+y^2+z^2+t^2$. **(<u>2</u>, например, при $x=z=1$, $y=t=0$. Воспользуемся неравенством между средним квадратическим и средним арифметическим $\sqrt{\dfrac{|x-y|^2+|y-z|^2+|z-t|^2+|t-x|^2}{4}}\geq\dfrac{|x-y|+|y-z|+|z-t|+|t-x|}{4}=1$, тогда после возведения в квадрат, раскрытия скобок и переноса удвоенных попарных произведе-**

ний в правую часть получим с учётом неотрицательности чисел, что $2(x^2+y^2+z^2+t^2)\geq 4+2xy+2yz+2zt+2tx\geq 4$, значит, $x^2+y^2+z^2+t^2\geq 2$, что и требовалось доказать.)

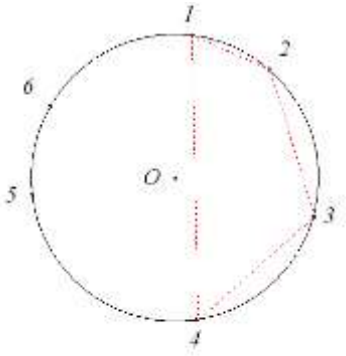
3–5. Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+bx+c=0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2+x+a=0$ и $x^2+cx+b=0$. Найдите сумму $a+b+c$. **(<u>–3</u>. Общий корень x_1 первых двух уравнений удовлетворяет уравнению $(a-b)x_1+(1-c)=0$, то есть $x_1=(c-1)/(a-b)$. Аналогично общий корень x_2 последних двух уравнений равен $(a-b)/(c-1)$. Тогда $x_1x_2=1$ и по теореме Виета x_2 – второй корень первого уравнения, то есть – общий корень уравнений $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$. Отсюда $(a-1)(x_2-1)=0$. Но при $a=1$ эти уравнения не имеют действительных корней. Значит, $x_2=1$, тогда $a=-2$, $b+c=-1$.)**

3–6. Чему равна наименьшая сумма набора из наибольшего количества последовательных натуральных чисел, каждое из которых не делится ни на одну из своих цифр? **(<u>4340</u>. В этом наборе не должно быть чисел, оканчивающихся на 1 и 5, иначе число на такую цифру разделится. Значит, в наборе максимум 5 чисел, оканчивающихся на 6, 7, 8, 9 и 0, т.к. другой интервал короче (окончание на 2, 3 и 4). При этом двузначные числа, оканчивающиеся на 0, и трёхзначные, оканчивающиеся на 00, нам не подойдут, т.к. делятся на первую цифру. В трёхзначных числах в разрядах сотен и десятков не должно быть цифр 1, 2, 3 и 4, 5 т.к. среди пяти подряд идущих обязательно есть делимость на каждую из этих цифр. Тогда набор из 5 чисел с минимальной суммой содержит только цифры 6, 7, 8, 9 и 0. Перебор показывает, что в наименьших пятёрках чисел не подходят 666, 678, 690, 768, 777, 786, как кратные 6 или 7. Тогда минимальный набор – это числа 866, 867, 868, 869, 870, где ни одно из чисел не делится ни на одну из своих цифр. Его сумма равна 5·868=4340.)**



4–4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 30°. Найдите острый угол между биссектрисами углов A и B. **(<u>75°</u>. С точностью до симметрии можно считать, что биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке A_1, а не CD, в частности она может проходить через точку C, т.е. идти по диагонали AC и совпадать с биссектрисой угла C. Тогда параллельная биссектриса угла C пересекает сторону DA в точке C_1. Из данных параллельностей и треугольников ABA_1 и CDC_1 следует, что $\angle A/2+\angle C/2+\angle B=\angle A/2+\angle C/2+\angle D$, значит, $\angle B=\angle D$. Пусть биссектрисы углов B и D пересекаются в точке P (внутри четырёхугольника $ABCD$) так, что $PBCD$ – выпуклый четырёхугольник, а биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K (см. рис.). Тогда из четырёхугольника $PBCD$ получаем, что $150°+\angle B/2+\angle C+\angle D/2=360°$, а с учётом $\angle B=\angle D$ получаем, что $\angle C+\angle B=210°$. Тогда из треугольника BKA_1 находим, что $\angle BKA_1=180°-\angle B/2-\angle C/2=180°-210°/2=75°$.)**

4–5. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Какое наименьшее количество выпуклых четырёхугольников с одноцветными вершинами, внутри которых не содержится центр окружности, могло оказаться? (**<u>3</u>. Среди 31 точки 6 цветов по принципу Дирихле найдутся 6 точек одного цвета. Пронумеруем их по часовой стрелке, тогда от 1-й до 4-й либо по часовой, либо против часовой стрелки будет дуга не более 180°. Значит, эти две точки с двумя другими точками этого цвета лежат на дуге, не превосходящей 180°, и дадут выпуклый 4-угольник, внутрь которого центр окружности не попадёт, при этом центр мог оказаться на стороне между 1-и и 4-й точками, если они будут диаметрально противоположными. И таких пар точек можно взять 3. Но если эти 6 точек одного цвета расположены в вершинах 6-угольника, диагонали которого не проходят через центр окружности, а по 5 точек остальных 5 цветов расположены в вершинах правильных 5-угольников, то у нас будет ровно 3 нужных четырёхугольника.)**



4–6. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 12×12 таким образом, чтобы во всех квадратах 3×3 кроме, быть может, четырёх, была отмеченная клетка? *Приведите ответ и пример*. (**<u>12</u>. Разобьём доску 12×12 на 16 непересекающихся квадратов 3×3 (см. рис.1). По крайней мере, в 16–4=12 из них должна быть своя отмеченная клетка, значит, надо не менее 12 отмеченных клеток. Пример на 12 отмеченных клеток – см. рис.2, при этом 4 квадрата без отмеченной клетки располагаются по главной диагонали – на рис. отмечены цветом.)**

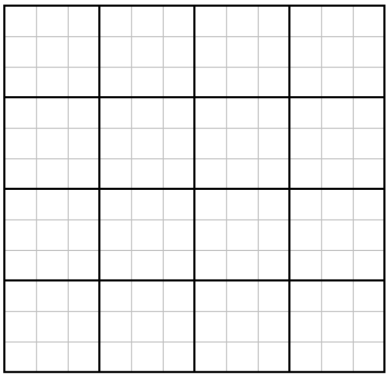


рис.1

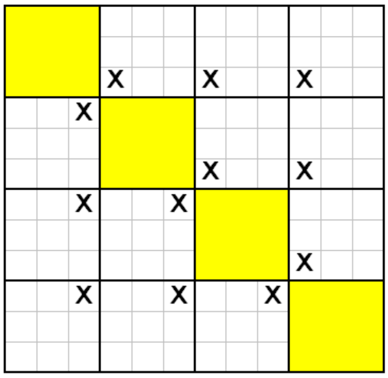


рис.2

5–5. Найдите наименьшее натуральное число n, про которое известно, что все его натуральные делители разбиваются на пары так, что сумма в каждой паре – простое число, а количество его различных натуральных делителей $\tau(n) \geq 10$. (**<u>210</u>. Рассмотрим любой простой множитель p числа n и степень его вхождения α в разложение на простые множители числа n. Тогда количество делителей, не кратных p, согласно формуле количества делителей будет равно $\frac{\tau(n)}{\alpha+1}$, а количество делителей, кратных p, равно $\frac{\tau(n)\cdot\alpha}{\alpha+1}$. Каждому кратному p делителю в паре должен соответствовать делитель, не кратный p, иначе их сумма будет кратна p и больше p, т.е. не будет простым числом. Значит, $\frac{\tau(n)\cdot\alpha}{\alpha+1} \leq \frac{\tau(n)}{\alpha+1}$, тогда $\alpha \leq 1$, но $\alpha \geq 1$, следовательно, $\alpha = 1$. Таким образом, в разложении n на простые множители все простые множители будут в первых степенях, и кроме того, делители в паре в совокупности должны содержать все простые множители, т.е. произведение парных делителей равно самому числу n. Тогда согласно формуле $\tau(n)$ должно быть степенью двойки. Под условие $\tau(n) \geq 10$ подходит минимум 16, а под минимальность самого числа подходит**

произведение четырёх наименьших простых чисел $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7=210$, при этом $\tau(210)=\tau(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)=16$ и $1+210=211$, $2+105=107$, $3+70=73$, $5+42=47$, $6+35=41$, $7+30=37$, $10+21=31$, $14+15=29$ – простые.)

5–6. Стороны клеток, составляющих прямоугольник $m \times n$, красят в три цвета так, чтобы каждая клетка имела две стороны одного цвета и две стороны другого цвета. Сколькими способами можно это сделать? **($\underline{3^{m+n} \cdot 2^{mn}}$. Раскрасим стороны клеток сверху (n штук) и слева (m штук) произвольным образом – это можно сделать 3^{m+n} способами. Далее начинаем красить по 2 стороны клеток по очереди по строкам (сверху вниз) слева направо в каждой строке. На каждом шагу у нас закрашена верхняя и левая сторона клетки. Если эти отрезки одного цвета, то 2 оставшихся отрезка красятся двумя способами (в один из двух остальных цветов), если эти отрезки разного цвета, то 2 других отрезка должны быть этих же цветов по одному – их можно раскрасить 2 способами. Таким образом, у всех mn клеток на каждом шагу будет по 2 варианта раскраски, значит, всего будет 2^{mn} способов раскрасить их стороны, а с учётом раскраски верхнего и левого краёв таблицы всего будет $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ способов.)**

6–6. Приведите пример двух последовательных шестизначных чисел, каждое из которых делится на квадрат любого своего простого делителя. *Ответ обосновать.* **($\underline{332928} = 577^2–1 = 576 \cdot 578 = 4 \cdot 288 \cdot 289 = 4 \cdot (17^2–1) \cdot 17^2 = 2^2 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 17^2=2^7 \cdot 3^2 \cdot 17^2$, $\underline{332929} = 577^2 = (288+289)^2$, пример строится по индукции по цепочке (8, 9), ($17^2–1 = 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 9 = 16 \cdot 18 = 288$, $17^2 = (8+9)^2=289$), ($577^2–1 = 2 \cdot 288 \cdot 2 \cdot 289=576 \cdot 578$, $577^2=(288+289)^2$), … . Также подойдут числа $\underline{235224} =485^2–1 = 484 \cdot 486 = 22^2 \cdot 2 \cdot 243=2^3 \cdot 11^2 \cdot 3^5$ и $\underline{235225}=485^2$, которые были найдены на игре одиннадцатиклассником, игравшим в одиночку и в уме (без ручки и бумаги).)**