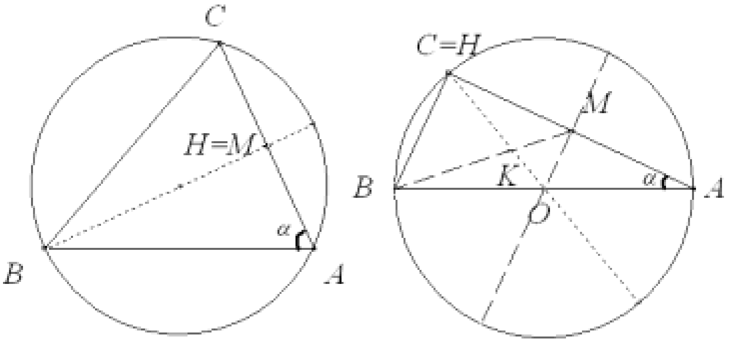
XV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XII Турнир математических игр.
Игра «Домино»**.** ***Старшая лига (10-11 класс).*** **Решения. 11.09.2019.**

0–0. Треугольник ABC с острым углом $\angle A=\alpha$ вписан в окружность. Её диаметр, проходящий через основание высоты треугольника, проведённой из вершины B, делит треугольник ABC на две части одинаковой площади. Найдите угол B. **(180°–2α или 90°–α. Пусть H – основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B, M – середина AC . Рассмотрим случай, когда указанный в условии диаметр пересекает сторону AB.**



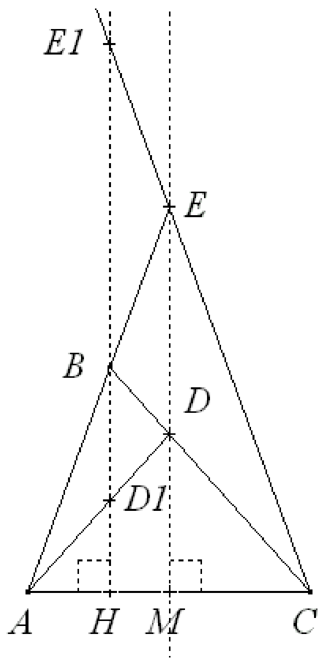
Пусть O – точка пересечения этого диаметра со стороной AB. Если точка O совпадает с B, то совпадают точки H и M. Тогда треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle B=180°-2\angle BAC=180°-2\alpha$. Если точки O и B различны, то поскольку $S_{\Delta AMB}=S_{\Delta ABC}/2=S_{\Delta AHO}$, то отрезки OH и BM пересекаются в некоторой точке K. Тогда $S_{\Delta BOK}=S_{\Delta MKH}$, следовательно, $S_{\Delta BOH}=S_{\Delta BMH}$. Т.к. BH – общее основание равновеликих треугольников BOH и BMH , то их высоты, опущенные из вершин O и M на это основание, равны. Следовательно, $MO \parallel BH$. Поэтому прямая OM – серединный перпендикуляр к хорде AC. Значит, на этой прямой лежит центр окружности. Таким образом, точка O принадлежит двум различным диаметрам окружности, поэтому является её центром. Тогда $\angle B=90°-\angle A=90°-\alpha$. Если указанный в условии диаметр пересекает сторону BC, то аналогичные рассуждения дадут $\angle A=90°>\alpha$, что невозможно.)

0–1. При каких $n > 50$ можно расставить по окружности n попарно различных чисел таким образом, чтобы каждое число было либо больше всех 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке? **(<u>При $n\geq100$</u>. Упорядочим числа по возрастанию $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$. Расставим при $n\geq100$ числа по часовой стрелке в следующем порядке a_1, a_2, a_3, …, a_{50}, a_n, a_{n-1}, …, a_{51}. Тогда каждое из чисел от 1-го до 50-го будет меньше следующих 50-ти чисел, а каждое из чисел от 51-го до n-го будет больше следующих 50-ти чисел. Заметим, что при $n\leq99$ для 50-го числа будет только 49 чисел, меньших его, и $n-50\leq99-50=49$ чисел, больших его, значит, для a_{50} невозможно выполнить требуемое условие.)**

0–2. Расставьте все целые числа от 1 до 10 в строку в таком порядке, чтобы сумма любых двух подряд стоящих чисел (кроме суммы двух последних) делилась на следующее за ними число. **(<u>например, 2, 4, 6, 10, 8, 1, 9, 5, 7, 3</u>)**

0–3. Найдите наибольшее натуральное число со свойством: ни оно само, ни любое из чисел, полученное из него вычёркиванием любого набора цифр (не всех), не делится на 3. **(<u>88</u>. Пусть n – искомое натуральное число. Его десятичная запись в силу условия не должна содержать цифр 3, 6, 9, 0. В силу признака делимости на три среди его цифр нет трёх, дающих один и тот же остаток от деления на 3, в частности, нет трёх одинаковых. Не может быть среди них также двух цифр, имеющих разные ненулевые остатки при делении на 3. Поэтому в числе n не более двух цифр, и тогда оно не более 88, что подходит.)**

0–4. Неотрицательные числа x, y, z, t удовлетворяют условию $|x–y|+|y–z|+|z–t|+|t–x| = 4$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $x^2+y^2+z^2+t^2$. **(<u>2</u>, например, при $x=z=1$, $y=t=0$. Воспользуемся неравенством между средним квадратическим и средним арифметическим $\sqrt{\frac{|x-y|^2+|y-z|^2+|z-t|^2+|t-x|^2}{4}} \geq \frac{|x-y|+|y-z|+|z-t|+|t-x|}{4}=1$, тогда после возведения в квадрат, раскрытия скобок и переноса удвоенных попарных произведений в правую часть получим с учётом неотрицательности чисел, что $2(x^2+y^2+z^2+t^2)\geq 4+2xy+2yz+2zt+2tx\geq 4$, значит, $x^2+y^2+z^2+t^2\geq 2$, что и требовалось доказать.)**



0–5. BH – высота остроугольного треугольника ABC. На стороне BC выбрана точка D, а на продолжении стороны AB за точку B — точка E, причём $AD = DC$ и $AE = EC$. Прямые AD и CE пересекают прямую BH в точках D_1 и E_1 соответственно. Какие значения может принимать отношение $D_1E_1 : DE$? **(<u>2</u>. В силу равенств $AD = DC$ и $AE = EC$ точки D и E лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC, который параллелен высоте BH. Тогда в силу подобия пар треугольников ABD_1 и AED, ABH и AEM, CED и CE_1B, CDM и CBH (M – середина AC) имеем: $\frac{D_1B}{DE}=\frac{AD_1}{AD}=\frac{AH}{AM}$, $\frac{BE_1}{DE}=\frac{CB}{CD}=\frac{CH}{CM}$, тогда $\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{D_1B+BE_1}{DE}=\frac{AH}{AM}+\frac{CH}{CM}=\frac{AH+CH}{AC/2}=\frac{AC}{AC/2}=2$.)**

0–6. Стороны клеток, составляющих прямоугольник $m\times n$, красят в три цвета так, чтобы каждая клетка имела две стороны одного цвета и две стороны другого цвета. Сколькими способами можно это сделать? **(<u>$3^{m+n}\cdot 2^{mn}$</u>. Раскрасим стороны клеток сверху (n штук) и слева (m штук) произвольным образом – это можно сделать 3^{m+n} способами. Далее начинаем красить по 2 стороны клеток по очереди по строкам (сверху вниз) слева направо в каждой строке. На каждом шагу у нас закрашена верхняя и левая сторона клетки. Если эти отрезки одного цвета, то 2 оставшихся отрезка красятся двумя способами (в один из двух остальных цветов), если эти отрезки разного цвета, то 2 других отрезка должны быть этих же цветов по одному – их можно раскрасить 2 способами. Таким образом, у всех mn клеток на каждом шагу будет по 2 варианта раскраски, значит, всего будет 2^{mn} способов раскрасить их стороны, а с учётом раскраски верхнего и левого краёв таблицы всего будет $3^{m+n}\cdot 2^{mn}$ способов.)**

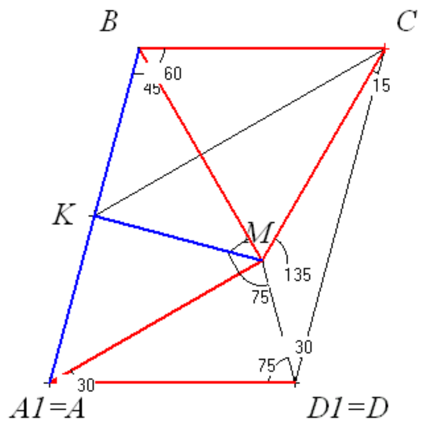
1–1. Решите уравнение $[x^2]=2019$, где $[t]$ – наибольшее целое число, которое не превосходит t (целая часть числа t). **(Уравнение равносильно неравенству $2019\leq x^2<2020$, откуда <u>$x\in\left(-\sqrt{2020}\,;\,-\sqrt{2019}\,\right]\cup\left[\sqrt{2019}\,;\,\sqrt{2020}\,\right)$</u>.)**

1–2. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных? **(<u>В 13/11 раза</u>. За полсуток на обычных часах минутная стрелка делает 12 оборотов, часовая – 1, значит, минутная догонит часовую стрелку ровно 12–1=11 раз. За полсуток на**

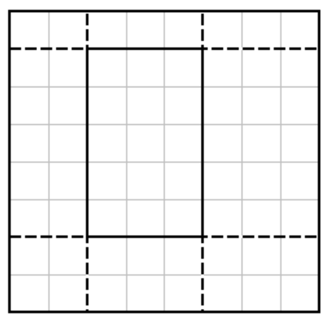
шуточных часах минутная стрелка делает 12 оборотов против часовой стрелки, часовая – 1 оборот по часовой стрелке, значит, минутная встретит часовую стрелку 12+1=13 раз (на каждом обороте по 1 разу и в конце 12-го оборота ещё раз). Значит, стрелки встречаются в 13/11 раза чаще в шуточных часах, чем в обычных.)

1–3. Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$. **(<u>–3</u>. Общий корень x_1 первых двух уравнений удовлетворяет уравнению $(a - b)x_1 + (1 - c) = 0$, то есть $x_1 = (c-1)/(a-b)$. Аналогично общий корень x_2 последних двух уравнений равен $(a-b)/(c-1)$. Тогда $x_1x_2 = 1$ и по теореме Виета x_2 – второй корень первого уравнения, то есть – общий корень уравнений $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$. Отсюда $(a - 1)(x_2 - 1) = 0$. Но при $a = 1$ эти уравнения не имеют действительных корней. Значит, $x_2 = 1$, тогда $a = -2$, $b + c = -1$.)**

1–4. Точка M внутри параллелограмма $ABCD$ с углом $\angle A = 75°$ такова, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Найдите $\angle BKC$, где K – середина стороны AB. **(<u>45°</u>. Построим во внешнюю сторону на стороне BM равностороннего треугольника BMC равнобедренный прямоугольный треугольник BMA_1 с прямым углом M, а затем на стороне A_1M этого треугольника во внешнюю сторону построим равнобедренный треугольника MA_1D_1 с $\angle MA_1D_1=30°$, $\angle A_1MD_1=\angle A_1D_1M=75°$ (см рис.). Тогда $\angle A_1BC=45°+60°=105°$, $\angle BA_1D_1=45°+30°=75°=180°-105°$, значит, отрезки BC и A_1D_1 параллельны, кроме того они равны по длине, значит, A_1BCD_1 – параллелограмм, у которого лучи BA_1 и CD_1 совпадают с лучами BA и CD. $\angle CMD_1=360°-60°-90°-75°=135°$, значит, луч MD_1 совпадает с лучом MD, а его точкой пересечения с лучом CD_1, совпадающим с лучом CD, должна быть точка $D=D_1$. Следовательно, параллелограмм A_1BCD_1 совпадает с исходным параллелограммом $ABCD$, значит, середина K стороны AB параллелограмма $ABCD$ является серединой гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABM. Тогда $KM=KB$, $\angle BKM=90°$, значит, $BCMK$ – дельтоид ($KB=BM$, $CB=CM$), следовательно, KC – биссектриса $\angle BKM=90°$, откуда $\angle BKC=90°/2=45°$.)**



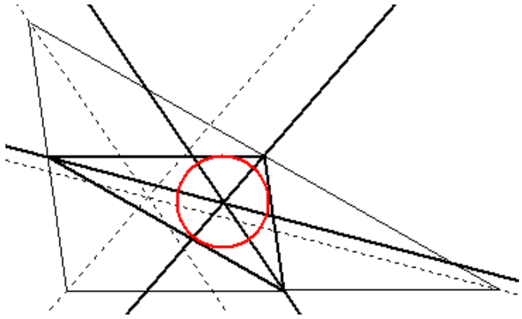
1–5. Шахматную доску по клеткам разрезают на пять прямоугольников так, чтобы один из них не содержал клеток на краю доски. Сколькими различными способами это можно сделать? **(<u>7056</u>. Раз один из прямоугольников не выходит на край, то остальные 4 прямоугольника обязательно содержат в себе по одному из 4 прямоугольных кусков между центральным прямоугольником и границей квадрата (см. рис.). Остаются ещё 4 угловых прямоугольных зоны, каждая из которых может быть отнесена к одному из двух крайних прямоугольников, т.е. всего 2^4 способов их распределить. Центральный же пря-**



моугольник определяется выбором двух вертикальных линий из 7 возможных и двух горизонтальных линий из 7 возможных, значит, всего существует $2^4 \cdot (C_7^2)^2 = 7056$ **вариантов разрезания.)**

1–6. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (причём есть и те, и другие, всего не менее трёх человек). Каждый сидящий за столом заявил, что оба его соседа лжецы. При этом оказалось, что теперь количество рыцарей можно определить однозначно. Сколько человек могло сидеть за столом? **(3, 4, 5, 7. Заметим, что рядом с рыцарем (Р) сидят два лжеца (Л), а рядом с лжецом – хотя бы один рыцарь, тогда весь стол разбивается на группы РЛ и РЛЛ. Пусть всего *k* рыцарей, тогда будет и *k* групп. Выполняется неравенство** $2k \le N \le 3k$, **где** N **– количество всех людей. Из него получаем, что** $N/3 \le k \le N/2$**.Т.к.** k **определяется однозначно, то в промежуток** $[N/3;\ N/2]$ **должно попадать ровно одно натуральное число, т.е.** $N/2 - N/3 = N/6$ **должно быть меньше 2, а значит,** $N<12$**. Перебрав все варианты для** N **от 3 до 11, получим, что подходят только 3, 4, 5, 7 (а в этих случаях рыцари есть и их количество соответственно равно 1, 2, 2 и 3).)**

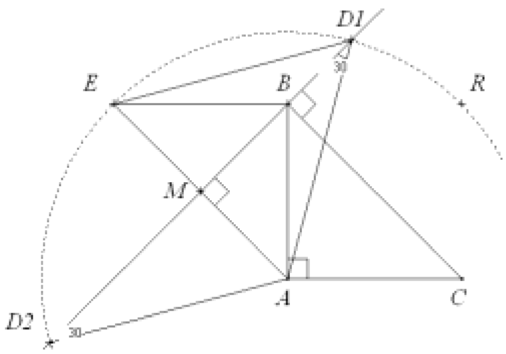
2–2. Как известно, три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке. Центром какой окружности будет эта точка? **(Это центр вписанной окружности серединного треугольника. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан исходного треугольника *ABC* и коэффициентом (–1/2) треугольник переходит в треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника. При этом прямые, содержащие биссектрисы исходного треугольника, переходят в параллельные им прямые, проходящие через середины сторон треугольника, т.е. в биссектрисы серединного треугольника, которые пересекаются в точке, являющейся центром вписанной окружности.)**



2–3. При каких натуральных $n \ge 3$ можно разложить $n(n-1)/2$ карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до $n(n-1)/2$, в n стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках было по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами $n(n-1)/2$ и 1? **(При нечётных** $n \ge 3$**. Предположим, что нам удалось разложить нужным образом карточки в** n **стопок. Рассмотрим граф, в котором вершины – стопки, а рёбра между вершинами показывают наличие последовательных номеров в этих стопках. Заметим, что у нас ровно** $n(n-1)/2$ **пар (с учётом пары** $n(n-1)/2$ **и 1 последовательных номеров, и ровно** $C_n^2 = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ **пар стопок, значит, наш полный граф должен оказаться ещё и эйлеровым, т.к. последовательные пары дают обход по каждому ребру ровно один раз. Эйлеровость в этом связном графе возможна только тогда, когда будет не более двух нечётных вершин. Заметим, что степень каждой вершины равна** $(n-1)$ **и будет чётной при нечётном** n**, а нечётной при чётном** n**. При нечётных степенях мы имеем не более двух нечётных вершин только при** $n=2$**, что не удовлетворяет условию. При всех же чётных степенях (при нечётном** n**) у нас согласно критерию эйлеровости есть эйлеров цикл, который и даст нам порядок укладывания карточек в стопки.)**

2–4. Чему равна наименьшая сумма набора из наибольшего количества последовательных натуральных чисел, каждое из которых не делится ни на одну из своих цифр? **(<u>4340</u>. В этом наборе не должно быть чисел, оканчивающихся на 1 и 5, иначе число на такую цифру разделится. Значит, в наборе максимум 5 чисел, оканчивающихся на 6, 7, 8, 9 и 0, т.к. другой интервал короче (окончание на 2, 3 и 4). При этом двузначные числа, оканчивающиеся на 0, и трёхзначные, оканчивающиеся на 00, нам не подойдут, т.к. делятся на первую цифру. В трёхзначных числах в разрядах сотен и десятков не должно быть цифр 1, 2, 3 и 4, 5 т.к. среди пяти подряд идущих обязательно есть делимость на каждую из этих цифр. Тогда набор из 5 чисел с минимальной суммой содержит только цифры 6, 7, 8, 9 и 0. Перебор показывает, что в наименьших пятёрках чисел не подходят 666, 678, 690, 768, 777, 786, как кратные 6 или 7. Тогда минимальный набор – это числа 866, 867, 868, 869, 870, где ни одно из чисел не делится ни на одну из своих цифр. Его сумма равна 5·868=4340.)**

2–5. Решите в натуральных числах уравнение $(a+b+c)^2/3 = a^2+b^2+c^2+2(a–b+1)$. **(<u>$a=n$, $b=n+2$, $c=n+1$, где n – любое натуральное число</u>. Преобразуем правую часть $a^2+b^2+c^2+2(a–b+1)=(a+1)^2+(b–1)^2+c^2$ и сделаем замены $a+1=x$, $b–1=y$, $c=z$, тогда $a+b+c=(a+1)+(b–1)+c=x+y+z$ и для нашего равенства после умножения на 3 получим цепочку равносильных равенств $(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)=2(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow 0=(x–y)^2+(y–z)^2+(z–x)^2$, откуда $x=y=z$. Тогда $a=n$, $b=n+2$, $c=n+1$, где n – любое натуральное число.)**



2–6. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Точка D на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно BC, такова, что $AD = BC$. Чему может быть равен угол BAD? (***<u>Комментарий</u>:*** *При решении задачи хорошо работает метод «идеального» построения, дающий быстрое построение чертежа с помощью параллелограмма ACBE (см. чертёж).* **<u>15° и 105°</u>. Заметим, что существуют 2 положения точки D (см. рис.), где D_1 лежит по одну стороны с C от прямой AB, а D_2 – по другую сторону. Рассмотрим параллелограмм $ACBE$ (см. рис), тогда середина M стороны AE лежит на прямой BD, значит, в прямоугольных треугольниках MAD_1 и MAD_2 катет AM равен половине гипотенузы AD_1 и AD_2 соответственно. Тогда $\angle MD_1A=30°$, $\angle MD_2A=\angle MD_1A=30°$ (в силу равнобедренности треугольника AD_1D_2). $\angle BAD_1=180°–\angle ABD_1–\angle BD_1A=180°–(45°+90°)–30°=15°$, $\angle BAD_2=180°–\angle BD_2A–\angle ABD_2= 180°–30°–45°=105°$.)**

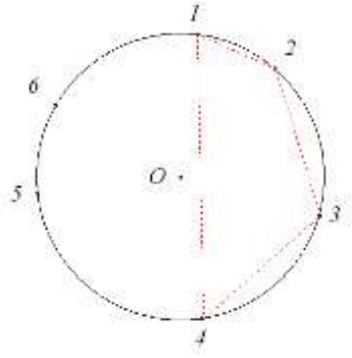
3–3. Имеется клетчатая доска $n\times n$, где $n\geq 2$. Двое играют в следующую игру: первый своим ходом ставит фишку в произвольную клетку доски по своему выбору, а потом передвигает её в одну из соседних по стороне клеток. Далее они по очереди, начиная со второго, передвигают фишку в одну из соседних по стороне клеток, при этом нельзя ставить фишку туда, где она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n при правильной игре выигрывает второй? **(<u>Ни при каких</u>.**

4	4	5	5	6	6	7
3	15	15	16	16	17	7
3	14	22	22	23	17	8
2	14	21		23	18	8
2	13	21	24	24	18	9
1	13	20	20	19	19	9
1	12	12	11	11	10	10

При чётных n первый разобьёт все клетки на доминошки 1×2 (например, го-

ризонтально) и каждым свои ходом будет закрывать парную клетку доминошки (в начале сразу закроет доминошку, а потом будет отвечать таким ходом на ход второго). При нечётных *n* первый разобьёт все клетки на пары, например, по спирали (см. рис. при *n*=7), кроме центральной, и также начнёт закрывать парные клетки доминошек, но с одним замечанием. Он раскрасит клетки в шахматном порядке так, чтобы все угловые клетки были чёрными, и поставит изначально фишку в белую клетку любой доминошки, закрыв затем парную клетку этой доминошки. При этой стратегии первый всегда сможет ответить на ход второго, при этом в нечётном случае второй не сможет сходить в центральную клетку, т.к. она будет чёрной, а второй ходит только по белым клеткам. Тогда в силу конечного числа ходов рано или поздно второй не сможет сходить, он и проиграет.)

3–4. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Какое наименьшее количество выпуклых четырёхугольников с одноцветными вершинами, внутри которых не содержится центр окружности, могло оказаться? **(<u>3</u>. Среди 31 точки 6 цветов по принципу Дирихле найдутся 6 точек одного цвета. Пронумеруем их по часовой стрелке, тогда от 1-й до 4-й либо по часовой, либо против часовой стрелки будет дуга не более 180°. Значит, эти две точки с двумя другими точками этого цвета лежат на дуге, не превосходящей 180°, и дадут выпуклый 4-угольник, внутрь которого центр окружности не попадёт, при этом центр мог оказаться на стороне между 1-и и 4-й точками, если они будут диаметрально противоположными. И таких пар точек можно взять 3. Но если эти 6 точек одного цвета расположены в вершинах 6-угольника, диагонали которого не проходят через центр окружности, а по 5 точек остальных 5 цветов расположены в вершинах правильных 5-угольников, то у нас будет ровно 3 нужных четырёхугольника.)**



3–5. Сколько может быть различных натуральных делителей ($\tau(n)$) у натурального числа *n*, если известно, что все его делители разбиваются на пары так, что сумма в каждой паре – простое число, а само $\tau(n)\le 20$? **(<u>2, 4, 8, 16</u>. Рассмотрим любой простой множитель *p* числа *n* и степень его вхождения α в разложение на простые множители числа *n*. Тогда количество делителей, не кратных *p*, согласно формуле количества делителей будет равно $\frac{\tau(n)}{\alpha+1}$, а количество делителей, кратных *p*, равно $\frac{\tau(n)\cdot\alpha}{\alpha+1}$. Каждому кратному р делителю в паре должен соответствовать делитель, не кратный *p*, иначе их сумма будет кратна *p* и больше *p*, т.е. не будет простым числом. Значит, $\frac{\tau(n)\cdot\alpha}{\alpha+1}\le\frac{\tau(n)}{\alpha+1}$, тогда $\alpha\le 1$, но $\alpha\ge 1$, следовательно, $\alpha=1$. Таким образом, в разложении *n* на простые множители все простые множители будут в первых степенях, и кроме того, делители в паре в совокупности должны содержать все простые множители, т.е. произведение парных делителей равно самому числу *n*. Тогда согласно формуле $\tau(n)$ должно быть степенью двойки, и под условие $\tau(n)\le 20$ подходят числа 2, 4, 8 и 16. Примеры: $\tau(2)=2$ и 1+2=3 – простое, $\tau(6)=\tau(2\cdot 3)=4$ и 1+6=7, 2+3=5 – простые, $\tau(30)=\tau(2\cdot 3\cdot 5)=8$ и 1+30=31, 2+15=17, 3+10=13, 5+6=11 – простые,**

$\tau(210)=\tau(2\cdot3\cdot5\cdot7)=16$ и $1+210=211$, $2+105=107$, $3+70=73$, $5+42=47$, $6+35=41$, $7+30=37$, $10+21=31$, $14+15=29$ – простые.)

3–6. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 12×12 таким образом, чтобы во всех квадратах 3×3 кроме, быть может, четырёх, была отмеченная клетка? *Приведите ответ и пример*. **(12. Разобьём доску 12×12 на 16 непересекающихся квадратов 3×3 (см. рис.1). По крайней мере, в 16–4=12 из них должна быть своя отмеченная клетка, значит, надо не менее 12 отмеченных клеток. Пример на 12 отмеченных клеток – см. рис.2, при этом 4 квадрата без отмеченной клетки располагаются по главной диагонали – на рис. отмечены цветом.)**

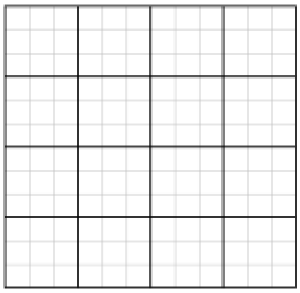


рис.1

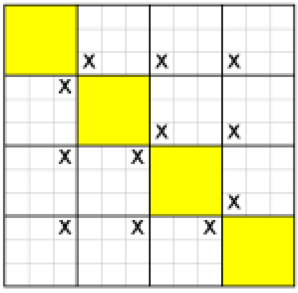


рис.2

4–4. Пусть T_n – количество непустых подмножеств S множества $\{1,2, ...,n\}$, у которых среднее арифметическое элементов является целым. При каких натуральных $n > 1$ число T_n чётно? **(При всех чётных n. Всего существует n одноэлементных подмножеств, значит, $T_n–n$ – это количество подмножеств, содержащих хотя бы 2 элемента. Тогда разобьём их на пары, когда каждому подмножеству, содержащему своё среднее арифметическое, в пару берётся подмножество с теми же элементами, кроме своего среднего арифметического, и наоборот (в обоих подмножествах обязательно не менее двух элементов), например, $\{1,2,3\}\leftrightarrow\{1,3\}$, $\{1,2,3,6\}\leftrightarrow\{1,2,6\}$. У нас получится взаимно однозначное соответствие, дающее разбиение на пары. Значит, $T_n–n$ чётно, тогда T_n чётно при всех чётных n.)**

4–5. Найдите наибольшее значение a, для которого неравенство $\sqrt{x^2+y^2}\ge x+y+a\sqrt{xy}$ выполнено при всех положительных x и y. ($\sqrt{2}-2$. **При $x=y=1$ получаем, что $\sqrt{2}\ge 2+a$, значит, $a\le\sqrt{2}-2$. Докажем, что при $a=\sqrt{2}-2$ неравенство $\sqrt{x^2+y^2}\ge x+y+(\sqrt{2}-2)\sqrt{xy}$ выполняется при всех положительных x и y. Действительно,**

$$\sqrt{x^2+y^2}\ge x+y+(\sqrt{2}-2)\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+2\sqrt{xy}\ge x+y+\sqrt{2}\sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+4xy+4\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{xy}\ge x^2+y^2+2xy+2xy+2\sqrt{2}x\sqrt{xy}+2\sqrt{2}y\sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

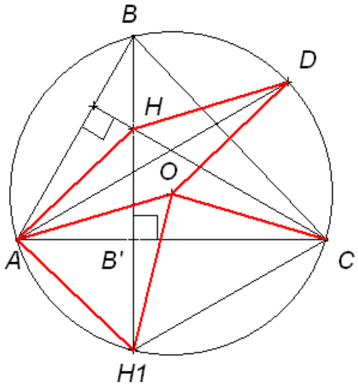
$$\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\ge x+y \Leftrightarrow 2(x^2+y^2)\ge x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$$ **- верное неравенство.)**

4–6. Для данного натурального n найдите наибольшее m, для которого существует таблица из m строк и n столбцов, заполненная числами так, что для каждых двух разных строк $[a_1, a_2, ..., a_n]$ и $[b_1, b_2, ..., b_n]$ выполнено равенство $\max(|a_1–b_1|, |a_2–b_2|, ... , |a_n–b_n|) = 1$. **($2^n$. Заметим, что в каждом столбце разность между наибольшим и наименьшим числами не превосходит 1, иначе $\max(|a_1–b_1|, |a_2–b_2|, ...,|a_n–b_n|) >1$ в каких-то двух строках. Закодируем строки n-значными двоичными кодами следующим образом. Если в строке число в i-м столбце отличается от максимального числа столбца максимум на 0,5, то в i-й разряд ставим 1; если же в строке число в i-м столбце отличается от максимального числа столбца больше чем на 0,5, т.е. от меньшего числа столбца отличается меньше чем на**

0,5, то в *i*-й разряд ставим 0. Если строк будет больше 2^n (количество кодов), то по принципу Дирихле найдутся две строки с одинаковым кодом, тогда у них в каждом столбце числа различаются максимум на 0,5, что противоречит условию. В качестве примера на 2^n строк подойдут всевозможные двоичные коды длины *n*. У любых двух таких строк хотя бы в одном разряде стоят разные цифры (0 и 1), за счёт этого столбца гарантируется максимум в 1 среди попарных разностей .)

5–5. Какой наибольший остаток может быть у числа $ab–a–b$ при делении на n, если известно, что каждое из чисел $ax–1$, $by–1$ и $x+y–1$ делится на n при натуральных a, b, x, y и n? **(<u>0</u>. Будем рассуждать по модулю *n*. $ax–1\equiv 0 \Rightarrow ax\equiv 1 \Rightarrow x$ взаимно просто с n и $(a–1)x+x\equiv 1 \Rightarrow (a–1)x \equiv 1– x\equiv y$, аналогично (из делимости $by–1$ на n) следует, что y взаимно просто с n и $(b–1)y\equiv x$. Значит, $(a–1)x(b–1)y\equiv xy$, но xy взаимно просто с n, поделим сравнение на xy и получим, что $(a–1)(b–1)\equiv 1 \Leftrightarrow ab–a–b\equiv 0$, т.е. $ab–a–b$ делится на n.)**

5–6. Точка H – ортоцентр остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность этого треугольника в точке D. Оказалось, что $HA=HD$, Чему может быть равен угол A этого треугольника? **(<u>60°</u>. С точностью до симметрии будем считать, что точка H лежит в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой AD (*). Докажем, что $AHDO$ – ромб, где O – центр описанной окружности треугольника ABC. Пусть в треугольнике ABC $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, причём $\beta>\gamma$ в силу условия (*). Тогда $\angle AOD = \cup AB+\cup BD = 2\angle ACB+2\angle BAD = 2\gamma+\alpha<\beta+\gamma+\alpha=180°$, т.е. O и H в разных полуплоскостях относительно AD, $\angle OAD=\angle ODA=(180°–2\gamma–\alpha)/2=90°–\gamma–\alpha/2$. Как известно, если ортоцентр H отобразить симметрично относительно сторон треугольника, то его образ попадёт на описанную окружность треугольника ABC. Рассмотрим точку H_1, симметричную H относительно AC. $\angle HAD=\angle HAC–\angle DAC=\angle H_1AC–\alpha/2=\angle H_1BC–\alpha/2$ (опираются на равные дуги)$=(90°–\angle BCA)–\alpha/2=90°–\gamma–\alpha/2=\angle OAD$, значит, равнобедренные треугольники AHD и AOD равны, т.е. $AHDO$ – ромб (при несовпадающих O и H в силу неравнобедренности треугольника ABC) со стороной, равной радиусу окружности, при этом AH и AO симметричны относительно биссектрисы AD угла BAC. Значит, $\angle BAC = \angle BAH+\angle HAC = \angle OAC+\angle H_1AC = \angle OAH_1 = 60°$, т.к. треугольник OAH_1 – равносторонний ($OH_1=OA=AH=AH_1$ – радиус окружности).)**



6–6. Приведите пример двух последовательных шестизначных чисел, каждое из которых делится на квадрат любого своего простого делителя. *Ответ обосновать.* **(<u>332928</u> $= 577^2–1 = 576\cdot 578 = 4\cdot 288\cdot 289 = 4\cdot(17^2–1)\cdot 17^2 = 2^2\cdot 16\cdot 18\cdot 17^2=2^7\cdot 3^2\cdot 17^2$, <u>332929</u> $= 577^2 = (288+289)^2$, пример строится по индукции по цепочке (8, 9), ($17^2–1 = 2\cdot 8\cdot 2\cdot 9 = 16\cdot 18 = 288$, $17^2 = (8+9)^2=289$), ($577^2–1 = 2\cdot 288\cdot 2\cdot 289=576\cdot 578$, $577^2=(288+289)^2$), … . Также подойдут числа <u>235224</u> $=485^2–1 = 484\cdot 486 = 22^2\cdot 2\cdot 243=2^3\cdot 11^2\cdot 3^5$ и <u>235225</u>$=485^2$, которые были найдены на игре одиннадцатиклассником, игравшим в одиночку и в уме (без ручки и бумаги).)**