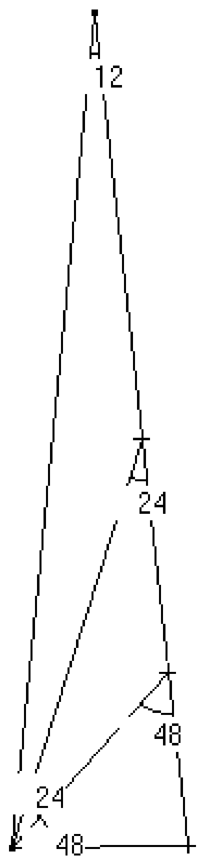
XV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».
<u>Младшая лига.</u> **<u>Решения</u>*. 12 сентября 2019 года.***

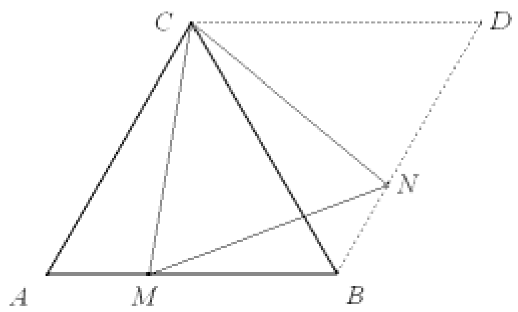
1. На доске выписано 10 попарно различных натуральных чисел, одно из которых равно 1001. Оказалось, что если выписаны числа a и b ($a < b$), то число $b–a$ тоже выписано. Какие значения может принимать наибольшее из выписанных чисел? **(<u>10010 и 1430</u>. Упорядочим наши числа $a_1<a_2<…<a_{10}$, тогда $a_2–a_1=a_1$ как единственный возможный вариант числа, значит, $a_2=2a_1$. Разности $a_3–a_1 > a_3–a_2$ могут быть равны только соответственно a_2 и a_1, значит, $a_3=3a_1$. Аналогично разбирая все разности для каждого следующего числа, получим, что $a_n=n\cdot a_1$, где n принимает все целые значения от 1 до 10. Тогда $1001=7\cdot 11\cdot 13=n\cdot a_1$ при $1\le n\le 10$, откуда получаем, что $n\in\{1, 7\}$, значит, $a_1\in\{1001, 143\}$, $a_{10}=10a_1 \in\{10010, 1430\}$, при этом нам подойдут соответственно наборы чисел (1001, 2·1001, 3·1001, …, 10·1001) и (143, 2·143, 3·143, …, 7·143=1001, …, 10·143). *<u>Комментарий</u>: Классика: даны числа – УПОРЯДОЧИВАЙ!*)**

2. В некотором магазине тетради и альбомы стоят целое число рублей. Известно, что 56 тетрадей стоят меньше 13 альбомов, но 13 тетрадей стоят больше 3 альбомов. Какое наименьшее число рублей может стоить тетрадь? **(<u>16</u>. Пусть тетрадь стоит t рублей, альбом – a рублей. Тогда выполняются два неравенства: $56t<13a$, $13t>3a$, откуда** $\frac{56}{13}t < a < \frac{13}{3}t \Leftrightarrow 4t+\frac{t}{3}-\frac{t}{39} < a < 4t+\frac{t}{3}$. **Значит, при t, кратном 3, справа будет целое число, тогда для целочисленности a необходимо** $\frac{t}{39}>1 \Leftrightarrow t>39$**; при $t\equiv 2 \pmod 3$ справа число с дробной частью** $\frac{2}{3}$**, тогда** $\frac{t}{39}>\frac{2}{3} \Leftrightarrow t>26$**; при $t\equiv 1 \pmod 3$ справа число с дробной частью** $\frac{1}{3}$ **, тогда** $\frac{t}{39}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow t>13$**, но с учётом остатка $t\ge 16$. Следовательно, наименьшее $t=16$, причём в этом случае условие задачи выполняется ($a=69$).)**



3. Разрежьте какой-нибудь равнобедренный треугольник на три различных равнобедренных треугольника. *Покажите само разрезание, укажите углы исходного треугольника и всех треугольников разрезания*. **(<u>12°, 84°, 84°</u>)**

4. На стороне AB правильного треугольника ABC выбрана произвольная точка M и на отрезке MC построен правильный треугольник MNC, вершина N которого находится от MC по ту же сторону, что и B. Найдите геометрическое место точек N, если точка M пробегает всю сторону AB. **(<u>ГМТ точки N – сторона BD ромба $ABDC$</u>. Треугольники ACM и BCN равны по двум сторонам и углу между ними ($AC=BC$, $MC=NC$, $\angle ACM=\angle BCN=60°-\angle MCB$), значит, $\angle CBN=\angle CAM=60°$, следовательно, точка N лежит на стороне BD ромба $ABDC$. При этом для каждого положения точки N на этой стороне есть соответствующее положение токи M.)**

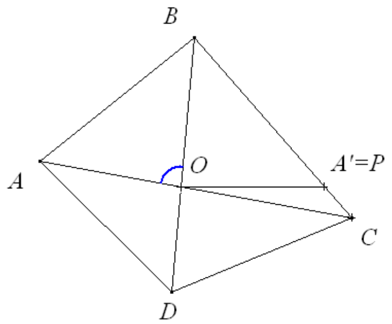


5. В выпуклом n-угольнике отметили 5 вершин таким образом, что для каждого натурального числа k от 1 до 20 можно найти две отмеченные вершины, между которыми в одном из направлений находится ровно k сторон многоугольника. Чему могло быть равно n? **(<u>21</u>. Всего существует** $2C_5^2=2\cdot\frac{5\cdot 4}{2}=20$ **пар расстояний между отмеченными вершинами (по 2 в разных направлениях для каждой пары вершин), значит, все эти 20 расстояний должны принимать все значения от 1 до 20. Тогда суммарно мы имеем ровно 10 пар длин (в обоих направлениях), которые в сумме дают все стороны нашего n–угольника 10 раз. Значит, $1+2+…+20=210=10n$, откуда $n=21$. В качестве примера отметим вершины (по часовой стрелке) под номерами 1, 2, 7, 9, 19. Тогда пара (1,2) даёт (→) в**

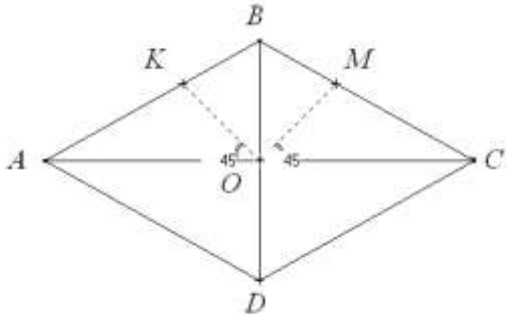
разных направлениях по 1 и 20 сторон: (7,9)$\to$2,19; (1,19)$\to$3,18; (2,19)$\to$4,17; (2,7)$\to$5,16; (1,7)$\to$6,15; (2,9)$\to$7,14; (1,9)$\to$8,13; (7,19)$\to$9,12; (9,19)$\to$10,11, имеем все 20 вариантов.)

6. Аня, Боря и Вася прошли один и тот же тест из 6 вопросов, на каждый из которых можно ответить "да" или "нет". Аня ответила "нет", "нет", "да", "да", "да", "да". Боря ответил "да", "нет", "нет", "да", "да", "да". Наконец, Вася ответил "нет", "да", "нет", "нет", "нет", "нет". Оказалось, что у Ани два неверных ответа, а у Бори только два верных. Сколько верных ответов у Васи? **(<u>3</u>. У Ани и Бори ответы совпадают в 4 вопросах (2, 4, 5, 6), а Вася на эти 4 вопроса ответил по-другому. Но при этом всего у Ани два неверных ответа, а у Бори только два верных, значит, ровно в двух из этих 4 вопросов Аня не права, а в 1-м и 3-м вопросах она права. Тогда Вася прав в 1-м вопросе и в двух вопросах среди четвёрки (2, 4, 5, 6), в которых Аня не права, т.е. Вася прав трижды.)**

7. В выпуклом четырёхугольнике диагонали пересекаются в точке O под углом α, при этом у любого угла величины α с вершиной в точке O часть, лежащая внутри четырёхугольника, имеет одну и ту же площадь. Найдите все выпуклые четырёхугольники, обладающие таким свойством. **(<u>Квадраты ($ABCD$)</u>. Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha=\angle AOB\le 90°$ (см. рис.). Рассмотрим точку A', симметричную A относительно BO. Она должна попасть на сторону BC (см. рис.), иначе у треугольника BOP с $\angle BOP=\angle AOB=\alpha$ площадь будет не равна площади треугольника AOB – противоречие с условием (P – точка пересечения луча OA' и стороны BC, луч OA' лежит в угле BOC, который равен $180°-\alpha\ge 90°\ge\alpha$). Значит, BO – биссектриса угла B нашего четырёхугольника. Аналогично получим, что каждая диагональ будет биссектрисой обоих углов, которые она соединяет.**



Тогда $ABCD$ – это ромб, т.к. из того, что AC и BD – биссектрисы, следует, что, во-первых, $AB=AD$, $BC=CD$, во-вторых, $AB=BC$, $CD=AD$, т.е. все стороны равны. Предположим теперь, что требуемым свойством обладает ромб, отличный от квадрата. Можно считать, что $AO>BO$. Тогда рассмотрим биссектрисы OK и OM углов AOB и BOC (K и M лежат на AB и BC). Тогда в силу свойства биссектрисы $AK>BK$ (т.к. $AO>BO$) и площадь треугольника BOK меньше половины площади треугольника AOB, при этом она ещё и равна площади треугольника BOM, равного BOK (в силу симметрии относительно BO). Значит, площадь $BMOK$ (часть четырёхугольника, высекаемая углом KOM, равным $\alpha=90°$), меньше двух половин (т.е. всей площади) треугольника AOB, также высекаемого углом в 90°. Противоречие. Значит, наш ромб будет квадратом, что и требовалось доказать.)

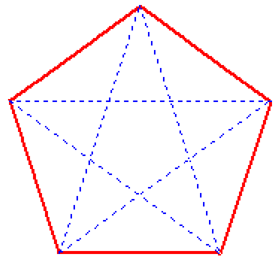


8. Комиссия из 9 судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику 3 балла, худшему — 1 балл, а оставшемуся — 2 балла. Оказалось, что в результате все участники набрали различное число баллов. Один из судей заметил, что победитель набрал меньше всего троек, а занявший третье место — больше всего. Сколько баллов набрал победитель? **(<u>19</u>. Из 9 троек худшему досталось более 9:3=3, значит, он набрал не менее 4·3+5·1=17 баллов. Всего же разыграно 9·(1+2+3)=54 балла, значит, первому и второму досталось не более 54–17=37 баллов, при этом они набрали не менее 18+19=37, т.к. их баллы различны и больше баллов третьего. Значит, первый набрал 19, второй – 18, третий – 17. Причём такое могло быть, например, если спортсмены набирали баллы следующим образом с учётом номера судьи: 19=3+3+2+2+2+2+2+2+1, 18=2+2+3+3+3+1+1+1+2, 17=1+1+1+1+1+3+3+3+3.)**

9. Сколько существует 18-значных чисел, в которых каждая ненулевая цифра встречается по 2 раза, и дающих максимально возможную сумму всех пятнадцати четырёхзначных чисел, составленных из четвёрок цифр, стоящих подряд? **(<u>7484400</u>. Пусть число $n=\overline{a_1a_2\ldots a_{18}}$, тогда сумма 15-ти четырёхзначных чисел после представления по разрядам равна $1000a_1+1100a_2+1110a_3+1111(a_4+a_5+\ldots+a_{15})+111a_{16}+11a_{17}+a_{18}$ и тогда согласно транснеравенству наибольшая сумма будет тогда, когда к коэффициентам по убыванию будем ставить и циф-**

ры по убыванию, т.е. a_{18}=a_{17}=1, a_{16}=a_1=2, a_2=a_3=3, а остальные цифры уже можно ставить в любом порядке. А количество таких чисел равно количеству перестановок с повторениями, когда каждую из 6 остальных цифр повторяем по 2 раза, т.е. $P(2,2,2,2,2,2)=\frac{12!}{2^6}=7484400$**.)**

10. 10 математиков ведут научную переписку. Любая пара учёных переписывается либо только на русском, либо только на английском, либо только на французском языке. Приведите пример с наибольшим количеством пар, ведущих переписку на русском языке, если нет трёх учёных, ведущих попарно друг с другом переписку на одном и том же языке. **(<u>25</u>. Согласно теореме Турана наибольшее количество рёбер (языков переписки) в графе без треугольников будет равно [10²/4]=25. Приведём пример графа такой десятки математиков. Пусть он представляет из себя две пятёрки в виде двух пятиконечных звёзд (см. рис.). В каждой звезде стороны – английский язык, диагонали – французский (треугольников по каждому такому языку нет). А в переписке между любыми учёными первой и второй пятёрки – русский язык, который также не даст нужного треугольника, т.к. по этому языку мы получим двудольный граф, все циклы в котором согласно критерию двудольности будут чётными.)**



11. Найдите все пары целых чисел a и b, для которых выполняется равенство $a^2+b^2+a^2b^2 = 3(a+b)^2/4$. **(<u>(1,1), (0,0) и (–1,–1)</u>. Данное неравенство равносильно цепочке неравенств $4a^2+4b^2+4a^2b^2 > 3a^2+6ab+3b^2 \Leftrightarrow (a^2–2ab+b^2)+ 4a^2b^2–4ab= (a–b)^2+4ab(ab–1)=0$. $(a–b)^2\geq0$, в произведении $ab(ab–1)$ участвуют два соседних целых числа, тогда такое произведение всегда неотрицательно, значит, равенство 0 возможно только при одновременном выполнении двух условий $a=b$ и $ab(ab–1)=0$, т.е. если оба числа равны 1, 0 или (–1).)**

12. Приведите пример 13 подряд идущих натуральных чисел, меньших 1000, таких, что у каждого из них есть простой делитель, меньший 13. **(<u>114, …, 126</u>. Рассмотрим такое натуральное n, что $n\equiv0 \pmod 2)$, $n\equiv0 \pmod 3)$, $n\equiv–1 \pmod 5)$, $n\equiv–5 \pmod 7)$, $n\equiv–7 \pmod{11})$. Согласно китайской теореме об остатках такое число существует на отрезке от 1 до 2·3·5·7·11=2310. Тогда n делится на 2, $(n+1)$ – на 5, $(n+2)$ – на 2, $(n+3)$ – на 3, $(n+4)$ – на 2, $(n+5)$ – на 7, $(n+6)$ – на 2, $(n+7)$ – на 11, $(n+8)$ – на 2, $(n+9)$ – на 3, $(n+10)$ – на 2, $(n+11)$ – на 5, $(n+12)$ – на 2, т.е. у каждого из 13 подряд идущих натуральных чисел будет простой делитель, не превосходящий 11.)**

13. На доске 8×8 отмечено 13 чёрных клеток. Клетчатый прямоугольник назовём *«чёрным»*, если он содержит две чёрные клетки, стоящие в его противоположных углах (ширина «чёрного» прямоугольника может быть равна 1). Для какого наименьшего n можно так расставить исходные 13 чёрных клеток, чтобы в каждом «чёрном» прямоугольнике было не более n чёрных клеток? *Приведите ответ и пример.* **(<u>5</u>. *<u>Доказательство оценки</u>:* Рассмотрим какую-нибудь чёрную клетку из самых левых, самых верхних, самых правых и самых нижних. Возможны 3 варианта, когда они все различны, когда их 3 и когда их 2 (см. примеры на рис.1, 2 и 3). Тогда все чёрные клетки накрываются 4, 3 или 1 «чёрными» прямоугольниками (см. рис.). С учётом повтора выбранных клеток в одном из прямоугольников по принципу Дирихле будет не менее [(13+4):4]+1=5 чёрных клеток, значит, $n\geq5$. *<u>Пример (методом пропеллера)</u>:* см рис.4. Нетрудно убедиться, что в каждом «чёрном» прямоугольнике будет не более 5 чёрных клеток.)**

рис.1

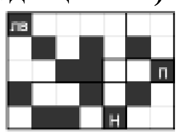


рис.2

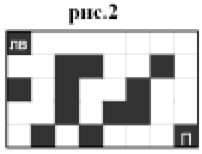


рис.3

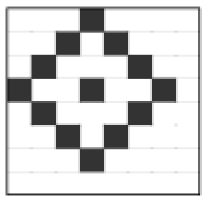
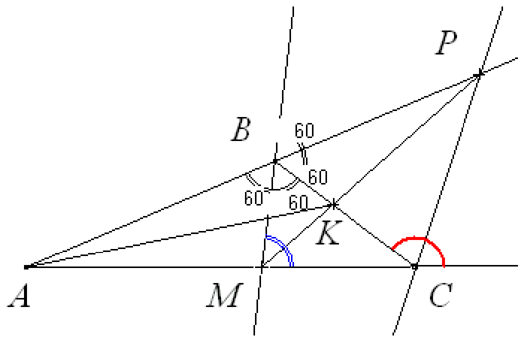


рис.4

14. Дано натуральное число $n > 10$. Вокруг стола сидят n человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих n людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. При каких n по всем этим бумажкам можно наверняка установить, на ком какой колпак надет? **(<u>При n, не делящемся на 4</u>. 1) Пусть $n=2k+1$ – нечётное число ($k\geq5$ – некоторое натуральное число). Т.к. каждый синий колпак видят двое (соседи), то сумма всех написанных количеств колпаков будет чётной, значит, среди наших $2k+1$ чисел (нечётного количества) есть чётное число (с точностью до нумерации будем считать, что его**

написал первый), т.к. иначе сумма нечётного количества нечётных чисел будет нечётной. Тогда по ответу 2 или 0 мы знаем о наличии или отсутствии колпаков у обоих соседей 1-го. Теперь по ответу 3-го и цвету колпака 2-го мы узнаем цвет колпака у 4-го, затем по ответу 5-го и цвету колпака 4-го узнаем цвет колпака у 6-го и т.д., по ответу $2k+1$-го и цвету колпака $2k$-го узнаем цвет колпака у 1-го, по ответу 2-го и цвету колпака 1-го узнаем цвет колпака у 3-го и т.д. В результате узнаем цвет колпака у каждого, что нам и требовалось. 2) Пусть $n=4k+2$ – чётное число, не делящееся на 4 ($k\geq 3$ – некоторое натуральное число). Рассмотрим отдельно ответы только чётных по номеру (их нечётное количество) и только нечётных по номеру (их нечётное количество). Тогда аналогичные первому случаю рассуждения дадут нам возможность узнать цвет колпака у каждого. 3) Пусть $n=4k$ – чётное число, делящееся на 4 ($k\geq 3$ – некоторое натуральное число). Тогда по ответу 1 у всех нечётных по номеру и ответу 0 у всех чётных по номеру мы не сможем узнать цвета колпаков у чётных, т.к. либо синие колпаки будут у всех тех, чей номер делится на 4, либо у всех людей с чётным номером, не делящимся на 4.)

15. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120°$. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке M, а биссектриса угла, смежного с углом BCA, пересекает прямую AB в точке P. Отрезок MP пересекает сторону BC в точке K. Какие значения может принимать $\angle AKM$? (**<u>30°</u>. Пусть $\angle BAC=\alpha$. Т.к. $\angle ABM=\angle MBC=\angle CBP=60°=120°/2$, то BP – биссектриса угла, смежного с MBC. Тогда P – точка пересечения внешних биссектрис BP и CP треугольника MBC, значит, является центром вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC. Следовательно, точка P лежит на биссектрисе $\angle BMC$. Тогда K – точка пересечения биссектрис $\angle BMC$ и $\angle MBP$ ($\angle MBK=\angle KBP=60°$), т.е. внешних биссектрис треугольника ABM, значит, является центром вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BM. Отсюда AK – биссектриса $\angle BAM=\alpha$. $\angle BMC=60°+\alpha$ (как внешний угол ΔABM), $\angle KMC=\angle BMC/2=30°+\alpha/2$, $\angle AKM=\angle KMC-\angle KAM=30°+\alpha/2-\alpha/2=30°$.)**



16. Есть набор из 2019 гирь разного веса, в котором среди любых четырёх гирь самая тяжёлая весит меньше, чем три другие, вместе взятые. Назовём гирю *хорошей*, если среди остальных 2018 гирь есть ровно вдвое более лёгкая. Какое наибольшее количество хороших гирь могло быть? (**<u>1010</u>. Рассмотрим граф, в котором вершины – гири, а ребро-стрелка направлено от хорошей гири к вдвое более лёгкой гире. Тогда ориентированные цепочки содержат максимум 3 гири, иначе для цепочки $8m\to 4m\to 2m\to m$ не выполняется условие «*самая тяжёлая весит меньше, чем три другие, вместе взятые*», т.к. $8m>7m=4m+2m+m$. Кроме того, цепочек длины 3 не более одной, иначе для $4m_1\to 2m_1\to m_1$ и $4m_2\to 2m_2\to m_2$ (где $m_1>m_2$) получим, что $4m_1>m_1+3m_2=m_1+m_2+2m_2$ (опять противоречие с условием). Значит, у нас не более одной цепочки длины 3, а цепочек длины 2 не более (2019–3)/2=1008, т.е. не более 2+1008=1010 хороших гирь. В качестве примера возьмём следующий убывающий набор из 2019 гирь $4,\ 4-\frac{1}{1009}, 4-\frac{1}{1008}, \ldots, 4-\frac{1}{2},\ 2,\ 2-\frac{1}{2018},\ 2-\frac{1}{2016}, \ldots,\ 2-\frac{1}{4}, 1$, в котором каждая из 1010 первых гирь будет хорошей. При этом самая тяжёлая гиря меньше суммарного веса трёх самых лёгких ($(2-\frac{1}{6})+(2-\frac{1}{4})+1=5-\frac{10}{24}=4+\frac{14}{24}>4$), значит, условие задачи выполняется для любой четвёрки гирь.)**