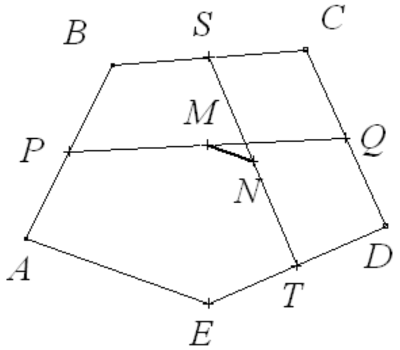
XV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».

<u>Старшая лига.</u> **<u>Решения</u>.** ***12 сентября 2019 года.***

1. На доске выписано 10 попарно различных натуральных чисел, одно из которых равно 1001. Оказалось, что если выписаны числа a и b ($a < b$), то число $b–a$ тоже выписано. Какие значения может принимать наибольшее из выписанных чисел? **(<u>10010 и 1430</u>. Упорядочим наши числа $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$, тогда $a_2–a_1=a_1$ как единственный возможный вариант числа, значит, $a_2=2a_1$. Разности $a_3–a_1 > a_3–a_2$ могут быть равны только соответственно a_2 и a_1, значит, $a_3=3a_1$. Аналогично разбирая все разности для каждого следующего числа, получим, что $a_n=n\cdot a_1$, где n принимает все целые значения от 1 до 10. Тогда $1001=7\cdot 11\cdot 13=n\cdot a_1$ при $1\le n\le 10$, откуда получаем, что $n\in\{1, 7\}$, значит, $a_1\in\{1001, 143\}$, $a_{10}=10a_1 \in\{10010, 1430\}$, при этом нам подойдут соответственно наборы чисел (1001, 2·1001, 3·1001, …, 10·1001) и (143, 2·143, 3·143, …, 7·143=1001, …, 10·143). *<u>Комментарий</u>: Классика: даны числа – УПОРЯДОЧИВАЙ!*)**

2. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$ при положительных x, y, z. **($\sqrt{2}$, которое достигается, например, при $x=1,\ y=\sqrt{2},\ z=1$. Докажем неравенство $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}\ge\sqrt{2}$. Оно равносильно неравенству $x^2+y^2+z^2-\sqrt{2}xy-\sqrt{2}yz\ge 0$, которое равносильно верному неравенству $(x-\dfrac{y}{\sqrt{2}})^2+(z-\dfrac{y}{\sqrt{2}})^2\ge 0$.)**

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и середины S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST. Пусть M и N – середины отрезков PQ и ST. Какие значения может принимать длина отрезка MN? **(<u>1/4</u>, т.к. $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$, что нетрудно получить, воспользовавшись разложением вектора средней линии четырёхугольника (выпуклого, невыпуклого и звёздчатого) как полусуммы векторов двух сторон:** $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{QS}}{2}=\dfrac{\dfrac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{DB}}{2}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{AE}}{4}$ **)**



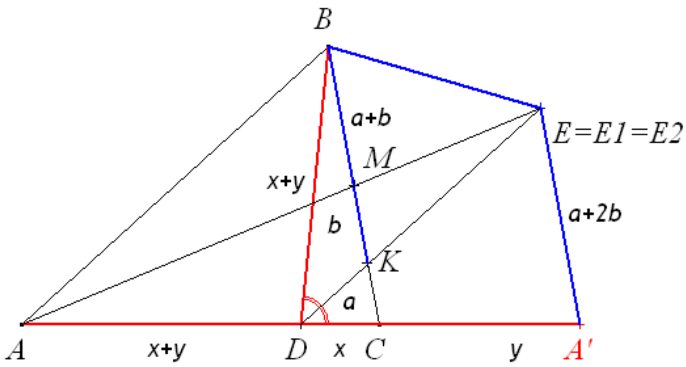
4. Сколькими способами можно расставить целые неотрицательные числа во всех клетках таблицы 10×10 так, чтобы (i) каждые два числа в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более, чем на 1, и (ii) каждое число, не превосходящее ни одного числа в соседних по стороне клетках, было равно 0? **(<u>2^{100}–1</u>. Очевидно, что минимальное из чисел на доске равно 0. Расставим все нули на доске произвольным образом. Таких расстановок ровно 2^{100}–1, т.к. для каждой клетки есть 2 варианта – поставить 0 или не поставить 0, при этом мы убираем случай, когда не поставлено ни одного 0. Докажем, что после этого остальные числа расставляются единственным способом. Действительно, рассмотрим все клетки, соседние (по стороне) с нулями. На них не могут стоять нули (все нули уже расставлены) и числа, большие 1, поэтому на них стоят единицы. Во всех остальных клетках доски единицы стоять не могут, т.к. рядом с ними не будет нулей, значит, они будут не больше всех своих соседей, т.е. нулями, а не единицами. Действуя аналогично, расставляем единственным образом 2, 3, ….)**

5. В выпуклом n-угольнике отметили 5 вершин таким образом, что для каждого натурального числа k от 1 до 20 можно найти две отмеченные вершины, между которыми в одном из направлений находится ровно k сторон многоугольника. Чему могло быть равно n? *Приведите ответ и примеры отмеченных вершин для каждого варианта ответа.* **(<u>21</u>. Всего существует $2C_5^2=2\cdot\dfrac{5\cdot 4}{2}=20$ пар расстояний между отмеченными вершинами (по 2 в разных направлениях для каждой пары вершин), значит, все эти 20 расстояний должны принимать все значения от 1 до 20. Тогда суммарно мы имеем ровно 10 пар длин (в обоих направлениях), которые в сумме дают все стороны нашего n–угольника 10 раз. Значит, $1+2+\ldots+20=210=10n$, откуда $n=21$. В качестве примера отметим вершины (по часовой стрелке) под номерами 1, 2, 7, 9, 19. Тогда пара (1,2) даёт (→) в разных направлениях по 1 и 20 сторон: (7,9)→2,19;**

(1,19)→3,18; (2,19)→4,17; (2,7)→5,16; (1,7)→6,15; (2,9)→7,14; (1,9)→8,13; (7,19)→9,12; (9,19)→10,11, имеем все 20 вариантов.)

6. Найдите наименьшее натуральное $n\geq 10$ такое, что остаток от деления числа 2^{2^n} на 2^n-1 не является степенью числа 4 с натуральным показателем? (**<u>16</u>. $2^{2^n}=(2^n)^m\cdot 2^{2^n-mn}=(2^n)^m\cdot 2^r$, где m – неполное частное при делении 2^n на n, $2^n-mn=r$ – остаток. Пусть $2^n-1=a$, тогда $2^n=a+1$, $2^{2^n}=(2^n)^m\cdot 2^r=(a+1)^m\cdot 2^r\equiv 2^r(\mathrm{mod}\ a)$. Тогда нам необходимо такое наименьшее n, что у остатка 2^r степень r будет нечётной или 0. Для чётных n, отличных от степени двойки, число $r=2^n-mn$ всегда чётно и не равно 0. Для простых $n\geq 3$ по следствию из малой теоремы Ферма $2^n\equiv 2$ (mod n), т.е. $r=2$. Переберём теперь наименьшие составные нечётные числа и степени двойки: $2^9\equiv(2^3)^3\equiv 8^3\equiv(-1)^3\equiv 8$ (mod 9), $2^{15}\equiv(2^4)^3\cdot 2^3\equiv 16^3\cdot 8\equiv 1^3\cdot 8\equiv 8$ (mod 15), при $n=16$ остаток $r=0$, что нам и подойдёт.)**

7. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $\angle A=\alpha<\angle B=\beta<\angle C=\gamma$. Серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону AC в точке D. Точка E лежит на прямой AM так, что прямые DE и AB параллельны. Найдите $\angle CBE$. (**<u>$\alpha-\beta+\gamma$</u>. Заметим, что луч DE – биссектриса $\angle BDC$, т.к. параллельна основанию AB равнобедренного треугольника. Пусть A' – симметрична A относительно D; E_1 и E_2 – точки пересечения биссектрисы DE и прямой AM соответственно с прямой, проходящей через A' параллельно BC; K – точка пересечения биссектрисы DE и отрезка BC (см. рис.). Введём длины отрезков: $DC=x$, $CA'=y$, $AD=BD=A'D=x+y$, $CK=a$, $KM=b$, $MB=a+b$ (см. рис.).**



Воспользуемся свойством биссектрисы в треугольнике BDC и свойством ряда равных отношений:

$$\frac{x}{a}=\frac{x+y}{a+2b}=\frac{(x+y)-x}{(a+2b)-a}=\frac{y}{2b}=\frac{x+(x+y)}{a+(a+2b)}=\frac{2x+y}{2(a+b)}$$

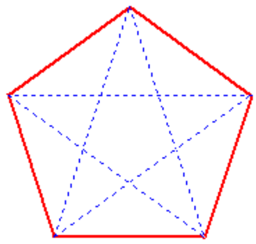
(*). Из подобия треугольников DKC и DE_1A': $\dfrac{x}{a}=\dfrac{x+y}{A'E_1}\Rightarrow$ (с учётом (*)) $A'E_1=a+2b=BK$. Из подобия треугольников AMC и AE_2A' (с учётом (*)): $\dfrac{2(x+y)}{A'E_2}=\dfrac{2x+y}{a+b}=\dfrac{2(x+y)}{a+2b}\Rightarrow A'E_2=a+2b=BK=A'E_1$. Значит, точки E_1 и E_2 совпадают, являясь точкой пересечения DE и AM, т.е. точкой E. Треугольники BDE и $A'DE$ равны по двум сторонам (DE – общая сторона, $BD=A'D$, $\angle BDE=\angle A'DE$), значит, $BE=A'E=BK$, $\angle BEK=\angle BKE$ (из равнобедренности ΔBKE)$=\angle DKC$ (вертикальные). Тогда треугольники DBE и DCK подобны по двум углам ($\angle BDE=\angle CDK$, $\angle BED=\angle DKC$), значит, $\angle DBE=\angle DCK=\angle ACB=\gamma$, $\angle CBE=\angle DBE-\angle DBC=\gamma-(\angle ABC-\angle ABD)=\gamma-(\beta-\angle BAD)=\gamma-(\beta-\alpha)=\alpha-\beta+\gamma$.)

8. 1000 бусинок лежат в 79 расположенных в ряд чашках, хотя бы две из которых не пустые. Разрешается взять из любой чашки 13 или 66 бусинок (если в ней столько есть) и переложить все эти бусинки в любую другую чашку. Оказалось, что такими операциями невозможно собрать все бусинки в одной чашке. Сколько всего вариантов распределения числа бусинок по чашкам? ($C_{79}^4=C_{82}^4$. **Если в какой-то чашке, в том числе в первой, количество бусинок не будет сравнимо с 12 по модулю 13 (назовём такую чашку *плохой*), то удастся собрать все бусинки в одной чашке. Предложим следующий алгоритм. Сначала во всех чашках, кроме одной плохой, убирая по 13 бусинок в эту плохую чашку, оставим остаток при делении на 13. Тогда в этих 78 чашках в сумме будет не более 78·12=936, а в плохой чашке не менее 1000–936=64, но 64≡12 (mod 13), значит, там не менее 65 бусинок. Если там ровно 65, то убираем 5 раз по 13 бусинок и обнуляем эту чашку. Если же там не менее 66, то убираем 66, что сравнимо с 1 по модулю 13, тем самым уменьшая остаток на 1, оставляя эту чашку плохой. Продолжая действовать подобным алгоритмом, мы получим в некоторый момент в этой чашке количество бусинок, кратное 13, после чего, убирая по 13 бусинок, её обнулим. Далее работая с меньшим количеством непустых чашек аналогичным образом, мы по одной обнулим все чашки, кроме некоторой, собрав все бусинки в ней. Если же в каждой чашке количество бусинок сравнимо с 12 по модулю 13, то в каждой чашке будет минимум по 12 бусинок, всего 79·12=948. Тогда у нас есть как бы 4 дополнительные группы по 13 бусинок (4·13=52=1000–948), распределённые по 79 чашкам. Число способов их раскидать равно числу**

способов разбросать 4 шарика в 79 чашек, что согласно методу шаров и перегородок равно $\overline{C}_{79}^{4} = C_{82}^{4}$.)

9. Найдите все натуральные g такие, что при каждом нечётном простом p найдётся натуральное n, для которого оба числа $g^n - n$ и $g^{n+1} - (n+1)$ делятся на p. **(<u>2</u>. Из условия следует, что $g^n \equiv n (\mathrm{mod}\ p)$ и $g^{n+1} \equiv (n+1)(\mathrm{mod}\ p)$ для любого нечётного p. Тогда $g^{n+1} - g^n \equiv g^n(g-1) \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$, что не может выполняться при любом нечётном g и любом чётном $g \geq 4$, т.к. иначе найдётся простой нечётный делитель p числа g или $g-1$ и $g^n(g-1) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$. Значит, g может равняться только 2. В качестве n подойдёт число $(p-1)^2$, т.к. по малой теореме Ферма $2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, значит, $2^{(p-1)^2} \equiv (2^{(p-1)})^{(p-1)} \equiv 1 \equiv (p-1)^2 (\mathrm{mod}\ p)$ и $2^{(p-1)^2+1} \equiv 2 \equiv (p-1)^2 + 1 (\mathrm{mod}\ p)$.)**

10. 10 математиков ведут научную переписку. Любая пара учёных переписывается либо только на русском, либо только на английском, либо только на французском языке. Приведите пример с наибольшим количеством пар, ведущих переписку на русском языке, если нет трёх учёных, ведущих попарно друг с другом переписку на одном и том же языке. **(<u>25</u>. Согласно теореме Турана наибольшее количество рёбер (языков переписки) в графе без треугольников будет равно [10²/4]=25. Приведём пример графа такой десятки математиков. Пусть он представляет из себя две пятёрки в виде двух пятиконечных звёзд (см. рис.). В каждой звезде стороны – английский язык, диагонали – французский (треугольников по каждому такому языку нет). А в переписке между любыми учёными первой и второй пятёрки – русский язык, который также не даст нужного треугольника, т.к. по этому языку мы получим двудольный граф, все циклы в котором согласно критерию двудольности будут чётными.)**



11. Найдите все пары целых чисел a и b, для которых выполняется строгое неравенство $a^2+b^2+a^2b^2 > 3(a+b)^2/4$. **(<u>Все пары целых чисел, кроме (1,1), (0,0) и (–1,–1)</u>. Данное неравенство равносильно цепочке неравенств $4a^2+4b^2+4a^2b^2 > 3a^2+6ab+3b^2 \Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+ 4a^2b^2-4ab=(a-b)^2+4ab(ab-1)>0$. $(a-b)^2 \geq 0$, в произведении $ab(ab-1)$ участвуют два соседних целых числа, тогда такое произведение всегда неотрицательно, значит, равенство 0 возможно только при одновременном выполнении двух условий $a=b$ и $ab(ab-1)=0$, т.е. если оба числа равны 1, 0 или (–1).)**

12. Приведите пример 13 подряд идущих натуральных чисел, меньших 1000, таких, что у каждого из них есть простой делитель, меньший 13. **(<u>114, …, 126</u>. Рассмотрим такое натуральное n, что $n \equiv 0$ (mod 2), $n \equiv 0$ (mod 3), $n \equiv -1$ (mod 5), $n \equiv -5$ (mod 7), $n \equiv -7$ (mod 11). Согласно китайской теореме об остатках такое число существует на отрезке от 1 до 2·3·5·7·11=2310. Тогда n делится на 2, $(n+1)$ – на 5, $(n+2)$ – на 2, $(n+3)$ – на 3, $(n+4)$ – на 2, $(n+5)$ – на 7, $(n+6)$ – на 2, $(n+7)$ – на 11, $(n+8)$ – на 2, $(n+9)$ – на 3, $(n+10)$ – на 2, $(n+11)$ – на 5, $(n+12)$ – на 2, т.е. у каждого из 13 подряд идущих натуральных чисел будет простой делитель, не превосходящий 11.)**

13. На доске 8×8 отмечено 13 чёрных клеток. Клетчатый прямоугольник назовём *«чёрным»*, если он содержит две чёрные клетки, стоящие в его противоположных углах (ширина «чёрного» прямоугольника может быть равна 1). Для какого наименьшего n можно так расставить исходные 13 чёрных клеток, чтобы в каждом «чёрном» прямоугольнике было не более n чёрных клеток? *Приведите ответ и пример.* **(<u>5</u>. <u>*Доказательство оценки*</u>*:* Рассмотрим какую-нибудь чёрную клетку из самых левых, самых верхних, самых правых и самых нижних. Возможны 3 варианта, когда они все различны, когда их 3 и когда их 2 (см. примеры на рис.1, 2 и 3). Тогда все чёрные клетки накрываются 4, 3 или 1 «чёрными» прямоугольниками (см. рис.). С учётом повтора выбранных клеток в одном из прямоугольников по принципу Дирихле будет не менее [(13+4):4]+1=5 чёрных клеток, значит, $n \geq 5$. <u>*Пример (методом пропеллера)*</u>*:* см рис.4. Нетрудно убедиться, что в каждом «чёрном» прямоугольнике будет не более 5 чёрных клеток.)**

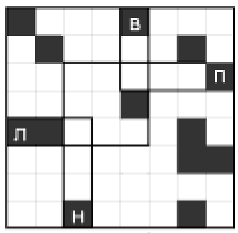


рис.1

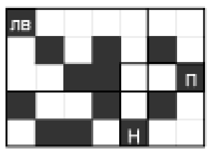


рис.2

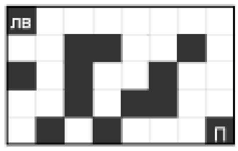


рис.3

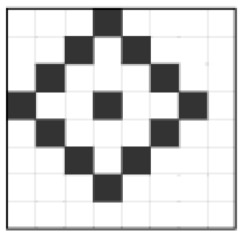
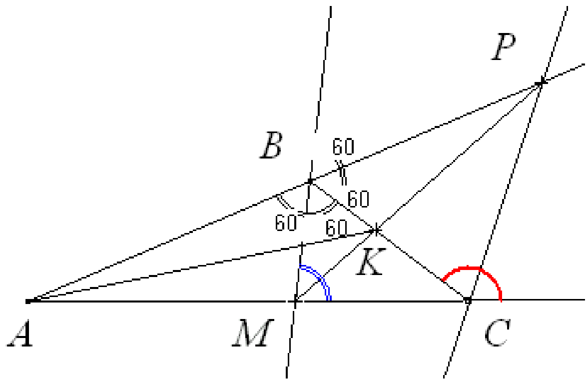


рис.4

14. Дано натуральное число $n > 10$. Вокруг стола сидят n человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих n людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. При каких n по всем этим бумажкам можно наверняка установить, на ком какой колпак надет? (**При n, не делящемся на 4. 1) Пусть $n=2k+1$ – нечётное число ($k\geq 5$ – некоторое натуральное число). Т.к. каждый синий колпак видят двое (соседи), то сумма всех написанных количеств колпаков будет чётной, значит, среди наших $2k+1$ чисел (нечётного количества) есть чётное число (с точностью до нумерации будем считать, что его написал первый), т.к. иначе сумма нечётного количества нечётных чисел будет нечётной. Тогда по ответу 2 или 0 мы знаем о наличии или отсутствии колпаков у обоих соседей 1-го. Теперь по ответу 3-го и цвету колпака 2-го мы узнаем цвет колпака у 4-го, затем по ответу 5-го и цвету колпака 4-го узнаем цвет колпака у 6-го и т.д., по ответу $2k+1$-го и цвету колпака $2k$-го узнаем цвет колпака у 1-го, по ответу 2-го и цвету колпака 1-го узнаем цвет колпака у 3-го и т.д. В результате узнаем цвет колпака у каждого, что нам и требовалось. 2) Пусть $n=4k+2$ – чётное число, не делящееся на 4 ($k\geq 3$ – некоторое натуральное число). Рассмотрим отдельно ответы только чётных по номеру (их нечётное количество) и только нечётных по номеру (их нечётное количество). Тогда аналогичные первому случаю рассуждения дадут нам возможность узнать цвет колпака у каждого. 3) Пусть $n=4k$ – чётное число, делящееся на 4 ($k\geq 3$ – некоторое натуральное число). Тогда по ответу 1 у всех нечётных по номеру и ответу 0 у всех чётных по номеру мы не сможем узнать цвета колпаков у чётных, т.к. либо синие колпаки будут у всех тех, чей номер делится на 4, либо у всех людей с чётным номером, не делящимся на 4.)**

15. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120°$. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке M, а биссектриса угла, смежного с углом BCA, пересекает прямую AB в точке P. Отрезок MP пересекает сторону BC в точке K. Какие значения может принимать $\angle AKM$? (**30°. Пусть $\angle BAC=\alpha$. Т.к. $\angle ABM=\angle MBC=\angle CBP=60°=120°/2$, то BP – биссектриса угла, смежного с MBC. Тогда P – точка пересечения внешних биссектрис BP и CP треугольника MBC, значит, является центром вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC. Следовательно, точка P лежит на биссектрисе $\angle BMC$. Тогда K – точка пересечения биссектрис $\angle BMC$ и $\angle MBP$ ($\angle MBK=\angle KBP=60°$), т.е. внешних биссектрис треугольника ABM, значит, является центром вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BM. Отсюда AK – биссектриса $\angle BAM=\alpha$. $\angle BMC=60°+\alpha$ (как внешний угол ΔABM), $\angle KMC=\angle BMC/2=30°+\alpha/2$, $\angle AKM=\angle KMC-\angle KAM=30°+\alpha/2-\alpha/2=30°$.)**



16. Есть набор из 2019 гирь разного веса, в котором среди любых четырёх гирь самая тяжёлая весит меньше, чем три другие, вместе взятые. Назовём гирю *хорошей*, если среди остальных 2018 гирь есть ровно вдвое более лёгкая. Какое наибольшее количество хороших гирь могло быть? (**1010. Рассмотрим граф, в котором вершины – гири, а ребро-стрелка направлено от хорошей гири к вдвое более лёгкой гире. Тогда ориентированные цепочки содержат максимум 3 гири, иначе для цепочки $8m\to 4m\to 2m\to m$ не выполняется условие «*самая тяжёлая весит меньше, чем три другие, вместе взятые*», т.к. $8m>7m=4m+2m+m$. Кроме того, цепочек длины 3 не более одной, иначе для $4m_1\to 2m_1\to m_1$ и $4m_2\to 2m_2\to m_2$ (где $m_1>m_2$) получим, что $4m_1>m_1+3m_2=m_1+m_2+2m_2$ (опять противоречие с условием). Значит, у нас не более одной цепочки длины 3, а цепочек длины 2 не более (2019–3)/2 = 1008, т.е. не более 2+1008=1010 хороших гирь. В качестве примера возьмём следующий убывающий набор из 2019 гирь $4,\ 4-\frac{1}{1009}, 4-\frac{1}{1008}, ..., 4-\frac{1}{2}, 2, 2-\frac{1}{2018}, 2-\frac{1}{2016}, ..., 2-\frac{1}{4}, 1$, в котором каждая из 1010 первых гирь будет хорошей. При этом самая тяжёлая гиря меньше суммарного веса трёх самых лёгких ($(2-\frac{1}{6})+(2-\frac{1}{4})+1=5-\frac{10}{24}=4+\frac{14}{24}>4$), значит, условие задачи выполняется для любой четвёрки гирь.)**