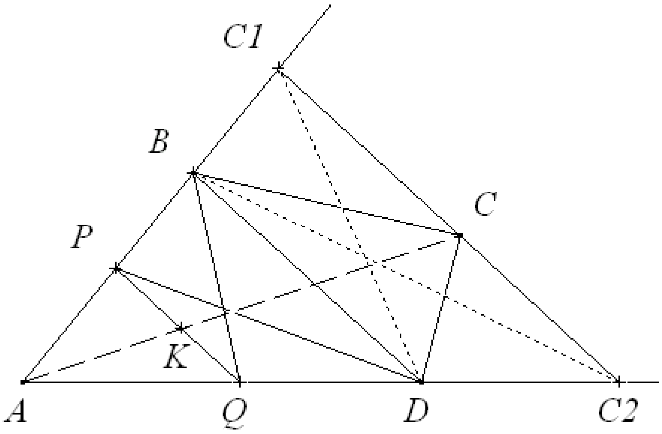
XV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XII Турнир математических игр.

Математическая игра «Пенальти».

<u>Младшая лига.</u> **<u>Решения</u>. *13 сентября 2019 года.***

1. Найдите какие-нибудь 10 пар различных целых чисел a и b из первого десятка, для которых $a^3+ab^2+b^3$ делится на 11. **(<u>Пары $(a,b)\in\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (1,6), (3,7), (5,8), (7,9), (9,10)\}$, т.е. пусть $b=n$, $a\equiv 2n \pmod{11}$, где n принимает все целые значения от 1 до 10</u>. Тогда $a^3+ab^2+b^3\equiv 8n^3+2n^3+n^3\equiv 11n^3\equiv 0 \pmod{11}$, т.е. все такие пары дают делимость на 11 требуемого числа.)**

2. Точки P и Q расположены соответственно на сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ так, что площадь четырёхугольника $ABCD$ в k раз больше площади каждого из треугольников ABQ и ADP. Отрезок PQ пересекает диагональ AC в точке K так, что $AK:KC=4:7$. Найдите k. **(<u>2,75</u>. Проведём через точку C прямую C_1C_2, параллельную BD и пересекающую прямые AB и AD в точках C_1 и C_2 соответственно (см. рис.). Тогда площади треугольников BCD, BC_1D и BC_2D равны, а в результате площади треугольников AC_1D и AC_2B равны между собой и равны площади исходного четырёхугольника $ABCD$. Значит, из условия «площадь четырёхугольника $ABCD$ в k раз больше площади каждого из треугольников ABQ и ADP» следует, что $AQ=AC_2/k$, $AP=AC_1/k$, Тогда PQ параллельна C_1C_2 и также $AK=AC/k$, значит, $AK:KC=1:(k–1)=4:7$, откуда $k–1=7/4 = 1{,}75$, а $k=2{,}75$.)**



3. На класс выделили несколько путёвок для поездки в «Орлёнок». После того, как классу добавили ещё одну путёвку, количество способов выбрать группу для поездки уменьшилось в 2 раза, а после добавления ещё одной путёвки количество способов выбрать группу для поездки уменьшилось ещё в 3 раза. Сколько учеников в классе? **(<u>11</u>. Пусть в классе n учеников и сначала выделили k путёвок, тогда получим систему уравнений:** $\begin{cases} C_n^k = 2C_n^{k+1} \\ C_n^{k+1} = 3C_n^{k+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 = 2(n-k) \\ k+2 = 3(n-k-1) \end{cases} \Leftrightarrow$ **$k=7$, $n=11$.)**

4. Сколькими способами можно раскрасить клетки доски 4×4 в 4 цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все 4 клетки были разного цвета? *Доску считаем жёстко закреплённой с нумерацией аналогично шахматной доске.* **(<u>168</u>=4!·7. Выделим центральный квадрат 2×2, его можно 4! способами раскрасить в 4 цвета. Рассмотрим любую произвольную раскраску этого квадрата, тогда перебор с левой верхней клетки показывает, что оставшиеся клетки можно раскрасить 7 способами – см. рис.)**

b	c	d	a
d	a	b	c
b	c	d	a
d	a	b	c

b	c	d	c
d	a	b	a
b	c	d	c
d	a	b	a

c	d	c	d
b	a	b	a
d	c	d	c
a	b	a	b

c	d	c	d
b	a	b	a
d	c	d	c
b	a	b	a

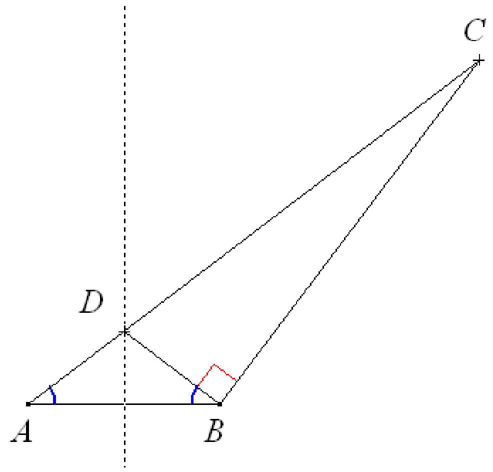
d	c	d	a
b	a	b	c
d	c	d	a
b	a	b	c

d	c	d	c
b	a	b	a
d	c	d	c
a	b	a	b

d	c	d	c
b	a	b	a
d	c	d	c
b	a	b	a

5. Множество A состоит из пяти положительных чисел. Множество их попарных произведений таково: {1/10, 3/20, 3/8, 1, 8/5, 5/2, 15/4, 4, 6, 40}. Найдите множество A. **(<u>A={1/5, 1/2, 3/4, 5, 8}</u>. Упорядочим наши 5 различных положительных чисел (равных нет, т.к. все попарные произведения различны): $a<b<c<d<e$. Тогда общее произведение всех 10 попарных произведений равно $(abcde)^4=81$, откуда $abcde=3$. Из упорядоченности следует, что по два самых маленьких и больших произведения равны $ab=1/10$, $ac=3/20$, $ce=6$, $de=40$. Тогда произведение $abde=4=abcde/c=3/c$, откуда $c=3/4$. Тогда $a=ac/c=1/5$, $e=ce/c=8$, $b=ab/a=1/2$, $d=de/e=5$. И действительно, все попарные произведения чисел множества A={1/5, 1/2, 3/4, 5, 8} равны исходному множеству из условия задачи, что элементарно проверяется перебором.)**

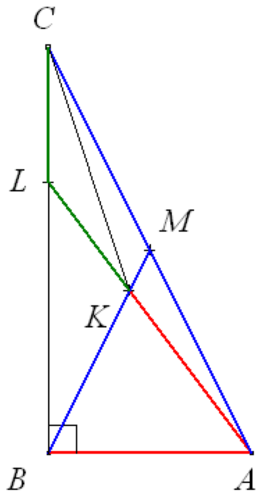
6. В треугольнике ABC $\angle A=\alpha$, серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC (внутри) в точке D. При каких α можно гарантированно утверждать, что $BC > CD$? **(<u>45°≤α<90°</u>. Если $\alpha\geq 90°$, то серединный перпендикуляр не пересечёт сторону AC. $\angle BDC=2\alpha$ (как внешний угол треугольника ABD), тогда при $\alpha\geq 45°$ этот угол будет прямым или тупым, т.е. наибольшим углом треугольника BCD, значит, напротив него будет наибольшая сторона и гарантированно выполняется неравенство $BC > CD$. При $0°<\alpha<45°$ получим $\angle BDC=2\alpha<90°$ и может оказаться так, что $\angle CBD=90°$ (см. рис.), тогда $BC < CD$.)**



7. Кузнечик, начиная с левой верхней клетки, прыгает по доске 27×27 или вправо, или вниз – через две клетки на третью или через три клетки на четвёртую, чередуя прыжки по длине. Сколько различных маршрутов может быть у кузнечика до правой нижней клетки? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(<u>1176</u>. Введём оси координат вниз и вправо от верхней левой клетки, центру которой дадим координаты (0,0), а центру правой нижней клетки – (26,26), считая расстояние между центрами соседних по стороне клеток равным 1. Тогда сумма координат должна от 0 увеличиться до 26+26=52, увеличиваясь за парный ход на 3+4=7, т.к. ходы по длине должны чередоваться. 52=7·7+3, значит, ходы по длине чередуются, начиная с 3 и заканчивая 3. Всего 8 ходов длины 3 и 7 ходов длины 4. По принципу Дирихле в одном из направлений надо сделать не менее 8 ходов, но тогда их ровно 8, т.к. иначе не менее 9 ходов длины не менее 3 дадут сдвиг хотя бы 9·3=27, а нам надо сдвиг на 26. Значит, в этом направлении (назовём его *большим*) будет сделано 6 ходов длины 3 и 2 хода длины 4, т.к. 26≡3·8+2, в другом же направлении (*меньшем*) будет сделано 2 хода длины 3 и 5 ходов длины 4. 2 хода длины 4 будут сделаны в большем направлении среди 7 таких по длине ходов (имеющих чётный номер по порядку), а сам их порядок в этой семёрке может быть выбран $C_7^2=\frac{7\cdot 6}{2}=21$ способом. 6 ходов длины 3 в большем направлении среди 8 таких ходов (нечётных по номеру) могут быть выбраны $C_8^6=C_8^2=\frac{8\cdot 7}{2}=28$ способами. А само большее направление может быть**

одним из двух – вниз или вправо. Значит, всего существует 2·21·28=1176 маршрутов кузнечика.)

8. Во время школьного шахматного турнира каждый семиклассник сыграл ровно одну партию с каждым восьмиклассником (других партий не было). При этом оказалось, что партий, в которых сыграли мальчик с девочкой, ровно на N больше, чем остальных партий. При каких натуральных N можно гарантированно утверждать, что суммарное количество участников турнира нечётно? **(N=2k, где k – нечётное натуральное число. Пусть m_1 и d_1 – количество мальчиков и девочек-семиклассников, m_2 и d_2 – количество мальчиков и девочек-восьмиклассников. Из условия получим уравнение $m_1 \cdot d_2 + m_2 \cdot d_1 = N + m_1 \cdot m_2 + d_1 \cdot d_2$, откуда после переноса в левую часть обоих произведений из правой части получим, что $(m_1 - d_1)(d_2 - m_2) = N$ – должно быть произведением нечётного и чётного чисел, т.к. при нечётном числе участников турнира из одного класса пришло нечётное количество, а из другого – чётное, значит, и соответствующие классам скобки будут иметь такую же чётность. Тогда N=2k, где k – нечётное натуральное число, т.к. при чётном k обе скобки могут оказаться чётными. При этом для каждого такого N будет существовать соответствующий турнир, например, когда $m_1 - d_1 = 2$, $d_2 - m_2 = k$ – таких наборов натуральных чисел бесконечно много.)**



9. На медиане BM треугольника ABC с $\angle A = \alpha$ и $\angle B = 90°$ взята точка K такая, что $AB = AK$. Прямая AK пересекает катет BC в точке L. Оказалось, что $KL = LC$. Чему может быть равен угол MKC? **(45°. В равнобедренном ($MA=MB$) треугольнике ABM имеем $\angle ABM = \alpha$, в равнобедренном ($AB=AK$) треугольнике ABK имеем $\angle AKB = \alpha$, значит, $\angle KLB = \angle AKB - \angle KBL = \alpha - (90° - \alpha) = 2\alpha - 90°$. Тогда в равнобедренном ($CL=LK$) треугольнике LKC имеем внешний $\angle KLB = 2\alpha - 90°$, значит, $\angle LKC = (2\alpha - 90°)/2 = \alpha - 45°$, $\angle MKC = \angle LKM - \angle LKC = \angle AKB - \angle LKC = \alpha - (\alpha - 45°) = 45°$.)**

10. В каждой клетке доски 10×10 стоит по фишке одного из 50 цветов, всего на доске по две фишки каждого цвета. Назовём цвет *хорошим*, если обе фишки этого цвета стоят в противоположных углах квадрата 4×4. Какое наибольшее количество *хороших* цветов могло быть? **(36. Разделим все**

10		1	2		1	2		1	2	
9	3	1	2	5	1	2	3	1	2	5
8	4	1	2	6	1	2	4	1	2	6
7		1	2		1	2		1	2	
6	5	1	2	3	1	2	5	1	2	3
5	6	1	2	4	1	2	6	1	2	4
4		1	2		1	2		1	2	
3	3	1	2	5	1	2	3	1	2	5
2	4	1	2	6	1	2	4	1	2	6
1		1	2		1	2		1	2	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

рис.1

10	21			24	1	11	29			32
9	22			25	2	12	30			33
8	23			26	3	13	31	6	16	34
7	24	1	11	21	4	14	32	7	17	29
6	25	2	12	22	5	15	33	8	18	30
5	26	3	13	23	6	16	34	9	19	31
4	27	4	14	28	7	17	35	10	20	36
3		5	15		8	18				
2					9	19				
1	28			27	10	20	36			35
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

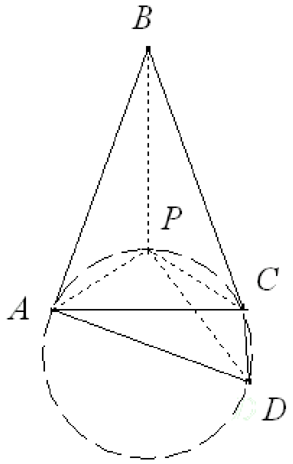
рис.2

клетки на 7 множеств (см. рис.1). Тогда для 1-го и 2-го множеств каждая клетка правого и левого столбцов должна иметь парную клетку с фишкой того же цвета среди клеток центрального столбца этого множества, значит, на клетках 1-ого и 2-ого множеств может быть максимум по 10 хороших цветов. Для множеств 3, 4, 5 и 6 для 4 клеток из вертикальных рядов по 2 клетки такого мно-

жества парная клетка должна быть в двух вертикальных рядах с одной клеткой такого множества, значит, на каждом таком множестве максимум по 2 хороших цвета. На остальных 16 неотмеченных клетках уместятся максимум 8 хороших цветов. Значит, всего не более 2·10+4·2+8=36 хороших цветов. Пример на 36 хороших цветов – см. рис.2.)

11. Все целые числа от 1 до 100 раскрашены в синий и зеленый цвета (оба цвета встречаются). Известно, что у любых двух разноцветных чисел сумма синяя, а произведение зеленое (если результаты этих действий не превосходят 100). Оказалось, что число 11 – зелёное. Сколько всего синих чисел могло быть в этой сотне? **(91. Заметим, что 1 – синяя, иначе при обязательном наличии какого-то синего числа *n* получим, что *n* должно оказаться зелёным как произведение зелёной 1 и синего числа *n* (противоречие). Если *z* – наименьшее зелёное число от 2 до 11, тогда все числа вида *z*+1, *z*+2, …, 2*z*–1 – синие, как суммы синего числа и зелёного (*z*). Далее синими будут все следующие числа от 2*z*+1 до 3*z*–1, т.к. *z* – зелёное и суммируется с синими числами от *z*+1, *z*+2, …, 2*z*–1, и т.д. Значит, все числа, не кратные *z*, будут синими. Отсюда *z*=11, иначе простое число 11 в силу вышеприведённых рассуждений должно быть синим, а оно зелёное. Тогда все числа, кратные 11 и меньшие 11^2 (т.е. в нашей сотне) окажутся зелёными как произведение зелёного числа 11 и некоторого меньшего синего (таких чисел [100:11]=9, а остальные числа в первой сотне будут синими, а их 100–9=91.)**

12. Из натурального числа *a*, не делящегося на 10, вычеркнули три нуля подряд. В результате получилось число *b*. Оказалось, что *a* делится на *b*. Найдите наибольшее возможное значение *a*/*b*. *Приведите ответ и пример.* **(999. *Пример*: 4990005:4995=999. *Решение:* Пусть нам дано число** $a=\overline{n000k}$ **, где *n* и *k* – натуральные числа, причём *k* может начинаться и с нулей, которое при делении на** $b=\overline{nk}$ **даёт *p*. Тогда *p*<1000, т.к. иначе** $pb \geq 1000b=\overline{nk000}>\overline{n000k}=a=pb$ **– противоречие. *Комментарий:* Пример для *p*=999 можно найти следующим образом. Рассмотрим разность** $b=1000b-999b=1000b-a=\overline{nk000}-\overline{n000k}=\overline{(k-1)99(10-k)}$**, где *k* считаем цифрой, тогда последняя цифра 10–*k*=*k*, откуда *k*=5, а само число *b*=4995.)**



13. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD*, отличном от дельтоида, *AB*=*BC*, ∠*B*=40°, ∠*D*=50° и биссектрисы углов *A*, *B* и *D* пересекаются в точке *P*. Найдите ∠*A*. **(90°:☺. Заметим, что биссектриса угла *B* в равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB*=*BC*) является серединным перпендикуляром к *AC*, тогда точка *P* является серединой малой дуги *AC* описанной окружности треугольника *ACD*, как точка пересечения серединного перпендикуляра к *AC* и биссектрисы угла *ADC*. Тогда ∠*APC*=180°–∠*ADC*=180°–50°=130°, ∠*PAC*=(180°–∠*APC*)/2=25°, ∠*BAP*=(180°–∠*ABC*)/2–∠*PAC*=70°–25°=45°, ∠*BAD*=2∠*BAP*=90°. *Замечание*: Но тогда ∠*BCD*=360°–∠*A*–∠*B*–∠*D*)=360°–90°–40°–50°=180°, т.е. четырёхугольник *ABCD* на самом деле является треугольником *ABD* – противоречие с условием задачи. Значит, условие задачи некорректно.)**

14. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $a^2+2b=b^2+c^2$, если числа a, b и c не превосходят 100 и удовлетворяют условию $a^2+bc < ab+ac$? **(<u>98</u>. Исходное неравенство $a^2+bc < ab+ac \Leftrightarrow 0<(a-b)(c-a)$, значит, число a расположено между b и c. Рассмотрим оба случая, учитывая, что числа – натуральные. 1). $b<a<c \Rightarrow b^2+c^2 \geq b^2+(a+1)^2 = b^2+a^2+2a+1 > b^2+a^2+2b > a^2+2b$. 2). $c<a<b \Rightarrow b^2+c^2 = b^2-2b+1+2b+(c^2-1) \geq (b-1)^2+2b \geq a^2+2b$, причём равенство возможно только при $c=1$, $b=a+1$, т.е. уравнению удовлетворяют 98 троек (2, 3, 1), (3, 4, 1), …, (99, 100, 1).)**

15. Сколько существует четырёхэлементных множеств натуральных чисел, содержащих число 2019 и таких, что все попарные разности элементов этих множеств – простые числа? **(<u>4 множества</u>. <u>*Решение*:</u> Среди четырёх чисел множества по принципу Дирихле найдутся два числа одной чётности, тогда их разность может быть только 2, значит, третьего числа той же чётности уже быть не должно, иначе между крайними числами будет разность уже в 4 – составное число. Значит, у нас 2 чётных и 2 нечётных числа. Также по принципу Дирихле найдутся в четвёрке два числа с одинаковых остатком при делении на 3, тогда их разность будет равна 3, а сами они будут разной чётности. Если теперь смотреть от одного числа разности 2 и 3, то они будут в разные стороны, иначе между числами будет разность 1 – не является простым числом. Переберём все случаи относительно числа 2019 и получим ровно 4 подходящих нам множества – {2012, 2014, 2017, 2019}, {2017, 2019, 2022, 2024}, {2014, 2016, 2019, 2021}, {2019, 2021, 2024, 2026}.)**

16. В университет поступили 200 студентов, которым на выбор было предложено k спецкурсов. Оказалось, что: 1) у любых двух студентов наборы курсов различны, 2) у любых двух студентов есть общий спецкурс, 3) нет спецкурса, изучаемого всеми студентами. При каком наименьшем k такое возможно? **(<u>9</u>. Пронумеруем спецкурсы числами от 1 до k. Закодируем двоичным k-значным кодом каждого студента, где 1 в соответствующем разряде означает, что данный курс выбран студентом, 0 – нет. У всех студентов разные коды, т.к. наборы курсов у студентов различны. Если курсов не более 7, то кодов не более $2^7=128<200$ – противоречие. Если курсов 8, то кодов – $2^8=256$. Разобьём все их на пары дополняющих друг друга до полного кода из 8 единиц: 10000000↔01111111, 11000000↔001111111 и т.д. (где у одного 1, у другого – 0, и наоборот). Всего таких пар 128, значит, найдутся коды из одной пары, но они не пересекаются, следовательно, соответствующие им студенты не имеют общего курса, – противоречие. Значит, курсов не менее 9. Для 9 спецкурсов в качестве примера возьмём 200 из всех кодов, содержащих 5 или 6 единиц. Количество таких кодов равно $C_9^5+C_9^6=C_{10}^6=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=210>200$, т.е. их хватает на 200 студентов. При этом любые два студента в сумме изучают не менее 10 спецкурсов из 9 имеющихся, т.е. у них обязательно есть общий спецкурс. При этом у них у всех вместе нет общего спецкурса т.к. иначе количество таких студентов-кодов было бы не больше $C_8^4+C_8^5=C_9^5=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=126<200$.)**