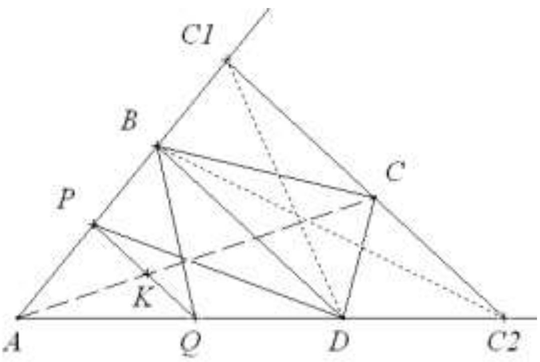
XV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XII Турнир математических игр.

Математическая игра «Пенальти».

<u>Старшая лига.</u> **<u>Решения</u>. *13 сентября 2019 года.***

1. Найдите какие-нибудь 10 пар различных целых чисел a и b из первого десятка, для которых $a^3+ab^2+b^3$ делится на 11. **(<u>Пары $(a,b)\in\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (1,6), (3,7), (5,8), (7,9), (9,10)\}$, т.е. пусть $b=n$, $a\equiv 2n \pmod{11}$, где n принимает все целые значения от 1 до 10</u>. Тогда $a^3+ab^2+b^3\equiv 8n^3+2n^3+n^3\equiv 11n^3\equiv 0 \pmod{11}$, т.е. все такие пары дают делимость на 11 требуемого числа.)**

2. Точки P и Q расположены соответственно на сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ так, что площадь четырёхугольника $ABCD$ в k раз больше площади каждого из треугольников ABQ и ADP. Отрезок PQ пересекает диагональ AC в точке K так, что $AK:KC=4:7$. Найдите k. **(<u>2,75</u>. Проведём через точку C прямую C_1C_2, параллельную BD и пересекающую прямые AB и AD в точках C_1 и C_2 соответственно (см. рис.). Тогда площади треугольников BCD, BC_1D и BC_2D равны, а в результате площади треугольников AC_1D и AC_2B равны между собой и равны площади исходного четырёхугольника $ABCD$. Значит, из условия «площадь четырёхугольника $ABCD$ в k раз больше площади каждого из треугольников ABQ и ADP» следует, что $AQ=AC_2/k$, $AP=AC_1/k$, Тогда PQ параллельна C_1C_2 и также $AK=AC/k$, значит, $AK:KC=1:(k–1)=4:7$, откуда $k–1= 7/4 = 1,75$, а $k=2,75$.)**



3. Известно, что при некоторых натуральных a и b число $n=a-\frac{1}{b}+b\left(b+\frac{3}{a}\right)$ — целое. Найдите все возможные значения, которые может принимать n. **(<u>9 и все точные чётные квадраты (натуральны чисел)</u>. $a-\frac{1}{b}+b\left(b+\frac{3}{a}\right)=a+b^2+\frac{3b^2-a}{ab}$ – целое число при натуральных a и b, значит, $\frac{3b^2-a}{ab}$ – целое число, откуда из делимости числителя на знаменатель следует, что a делится на b. Тогда $a=kb$, где k – натуральное число, подставим и получим, что $\frac{3b^2-a}{ab}=\frac{3b^2-kb}{kb^2}=\frac{3b-k}{kb}$ - целое, откуда k делится на b. Значит, $k=nb$, где n – натуральное число, подставим и получим, что $\frac{3b^2-a}{ab}=\frac{3b-k}{kb}=\frac{3b-nb}{nb^2}=\frac{3-n}{nb}$ – целое, откуда 3 делится на n, т.е. $n\in\{1, 3\}$. При $n=1$ получим, что 2 делится на b, т.е. $b\in\{1, 2\}$. Тогда получим в этих случаях $b=1$, $k=1$, $a=1$, $a-\frac{1}{b}+b\left(b+\frac{3}{a}\right)=4$ и $b=2$, $k=2$, $a=4$, $a-\frac{1}{b}+b\left(b+\frac{3}{a}\right)=9$. При $n=3$ получим, что $k=3b$, $a=3b^2$, $a-\frac{1}{b}+b\left(b+\frac{3}{a}\right)=4b^2=(2b)^2$ – чётный точный квадрат, причём любого чётного натурального числа.)**

4. Сколькими способами можно раскрасить клетки доски 4×4 в 4 цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все 4 клетки были разного цвета? *Доску считаем жёстко закреплённой с нумерацией аналогично шахматной доске.* **(<u>168</u>=4!·7. Выделим**

центральный квадрат 2×2, его можно 4! способами раскрасить в 4 цвета. Рассмотрим любую произвольную раскраску этого квадрата, тогда перебор с левой верхней клетки показывает, что оставшиеся клетки можно раскрасить 7 способами – см. рис.)

b	c	d	a
d	a	b	c
b	c	d	a
d	a	b	c

b	c	d	c
d	a	b	a
b	c	d	c
d	a	b	a

c	d	c	d
b	a	b	a
d	c	d	c
a	b	a	b

c	d	c	d
b	a	b	a
d	c	d	c
b	a	b	a

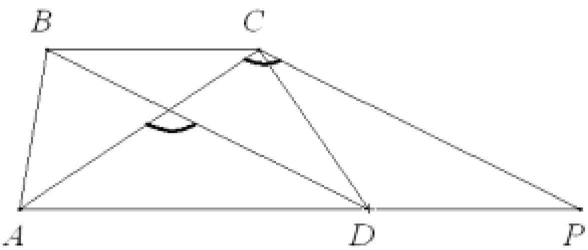
d	c	d	a
b	a	b	c
d	c	d	a
b	a	b	c

d	c	d	c
b	a	b	a
d	c	d	c
a	b	a	b

d	c	d	c
b	a	b	a
d	c	d	c
b	a	b	a

5. Сколько решений в целых числах, не превосходящих по модулю 10, имеет уравнение $x^3+y^3=(x+y)^2$? **(<u>26 пар</u>. Возможны 2 случая: $x+y=0$ и $x+y\neq0$. Первый случай даёт все пары вида $(z,-z)$, где z – любое целое число от (–10) до 10 – всего 21 вариант. Во втором случае после деления на $x+y\neq0$ получим уравнение $x^2-xy+y^2=x+y \Leftrightarrow x^2-x(y+1)+y^2-y=0$, которое решим как квадратное относительно x. Тогда $D=(y+1)^2-4(y^2-y)=-3y^2+6y+1$ должно быть точным квадратом, что выполняется при $y\in\{0, 1, 2\}$. Перебор этих случаев даст нам ещё 5 пар – (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2).)**

6. В трапеции средняя линия равна 7, высота равна $\frac{15\sqrt{3}}{7}$, а угол между диагоналями против основания равен 120°. Найдите диагонали трапеции. **(<u>6 и 10</u>. Через вершину C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке P. Тогда $AP=AD+DP=AD+BC=2\cdot7=14$. Обозначим $AC=x$, $BD=CP=y$. Поскольку $\angle ACP=120°$, то $AC^2+CP^2-2AC\cdot CP\cdot\cos 120°=AP^2$, или $x^2+y^2+xy=196$. С другой стороны, $S_{\Delta APC}=\frac{xy\cdot\sin120°}{2}=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot\frac{15\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}\cdot14\cdot\frac{15\sqrt{3}}{7}=15\sqrt{3}$, откуда $xy=60$. Из системы $x^2+y^2+xy=196$, $xy=60$ находим, что $AC=x=6$, $BD=y=10$ или $AC=x=10$, $BD=y=6$.)**

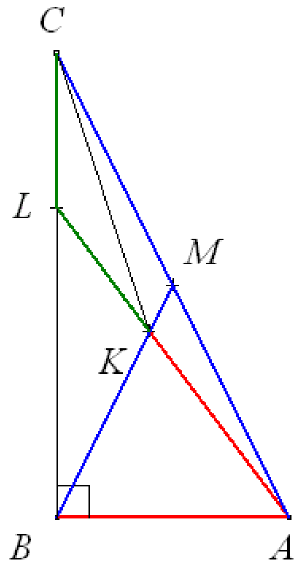


7. Кузнечик, начиная с левой верхней клетки, прыгает по доске 27×27 или вправо, или вниз – через две клетки на третью или через три клетки на четвёртую, чередуя прыжки по длине. Сколько различных маршрутов может быть у кузнечика до правой нижней клетки? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(<u>1176</u>. Введём оси координат вниз и вправо от верхней левой клетки, центру которой дадим координаты (0,0), а центру правой нижней клетки – (26,26), считая расстояние между центрами соседних по стороне клеток равным 1. Тогда сумма координат должна от 0 увеличиться до 26+26=52, увеличиваясь за парный ход на 3+4=7, т.к. ходы по длине должны чередоваться. 52=7·7+3, значит, ходы по длине чередуются, начиная с 3 и заканчивая 3. Всего 8 ходов длины 3 и 7 ходов длины 4. По принципу Дирихле в одном из направлений надо сделать не менее 8 ходов, но тогда их ровно 8, т.к. иначе не менее 9 ходов длины не менее 3 дадут сдвиг хотя бы 9·3=27, а нам надо сдвиг на 26. Значит, в этом направлении (назовём его *большим*) будет сделано 6 ходов длины 3 и 2 хода длины 4, т.к. 26≡3·8+2, в другом же направлении (*меньшем*) будет сделано 2 хода длины 3 и 5 ходов длины 4. 2 хода длины 4 будут сделаны в большем направлении среди**

7 таких по длине ходов (имеющих чётный номер по порядку), а сам их порядок в этой семёрке может быть выбран $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способом. 6 ходов длины 3 в большем направлении среди 8 таких ходов (нечётных по номеру) могут быть выбраны $C_8^6 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ способами. А само большее направление может быть одним из двух – вниз или вправо. Значит, всего существует 2·21·28=1176 маршрутов кузнечика.)

8. Во время школьного шахматного турнира каждый семиклассник сыграл ровно одну партию с каждым восьмиклассником (других партий не было). При этом оказалось, что партий, в которых сыграли мальчик с девочкой, ровно на N больше, чем остальных партий. При каких натуральных N можно гарантированно утверждать, что суммарное количество участников турнира нечётно? **(<u>$N=2k$, где k – нечётное натуральное число</u>. Пусть m_1 и d_1 – количество мальчиков и девочек-семиклассников, m_2 и d_2 – количество мальчиков и девочек-восьмиклассников. Из условия получим уравнение $m_1 \cdot d_2 + m_2 \cdot d_1 = N + m_1 \cdot m_2 + d_1 \cdot d_2$, откуда после переноса в левую часть обоих произведений из правой части получим, что $(m_1 - d_1)(d_2 - m_2) = N$ – должно быть произведением нечётного и чётного чисел, т.к. при нечётном числе участников турнира из одного класса пришло нечётное количество, а из другого – чётное, значит, и соответствующие классам скобки будут иметь такую же чётность. Тогда $N=2k$, где k – нечётное натуральное число, т.к. при чётном k обе скобки могут оказаться чётными. При этом для каждого такого N будет существовать соответствующий турнир, например, когда $m_1 - d_1 = 2$, $d_2 - m_2 = k$ – таких наборов натуральных чисел бесконечно много.)**

9. На медиане BM треугольника ABC с $\angle A = \alpha$ и $\angle B = 90°$ взята точка K такая, что $AB = AK$. Прямая AK пересекает катет BC в точке L. Оказалось, что $KL = LC$. Чему может быть равен угол MKC? **(<u>45°</u>. В равнобедренном ($MA=MB$) треугольнике ABM имеем $\angle ABM = \alpha$, в равнобедренном ($AB=AK$) треугольнике ABK имеем $\angle AKB = \alpha$, значит, $\angle KLB = \angle AKB - \angle KBL = \alpha - (90° - \alpha) = 2\alpha - 90°$. Тогда в равнобедренном ($CL=LK$) треугольнике LKC имеем внешний $\angle KLB = 2\alpha - 90°$, значит, $\angle LKC = (2\alpha - 90°)/2 = \alpha - 45°$, $\angle MKC = \angle LKM - \angle LKC = \angle AKB - \angle LKC = \alpha - (\alpha - 45°) = 45°$.)**



10. В каждой клетке доски 10×10 стоит по фишке одного из 50 цветов, всего на доске по две фишки каждого цвета. Назовём цвет *хорошим*, если обе фишки этого цвета стоят в противоположных углах квадрата 4×4. Какое наибольшее количество *хороших* цветов могло быть? **(<u>36</u>. Разделим все клетки на 7 множеств (см. рис.1). Тогда для 1-го и 2-го множеств каждая клетка правого и левого столбцов должна иметь парную клетку с фишкой того же цвета среди клеток центрального столбца этого множества, значит, на клетках 1-ого и 2-ого множеств может быть максимум по 10 хороших цветов. Для множеств 3, 4, 5 и 6 для 4 клеток из вертикальных рядов по 2 клетки такого множества парная клетка должна быть в двух вертикальных рядах с одной клеткой такого множества, значит, на каждом таком множестве максимум по 2 хороших цвета. На остальных 16**

неотмеченных клетках уместятся максимум 8 хороших цветов. Значит, всего не более 2·10+4·2+8=36 хороших цветов. Пример на 36 хороших цветов – см. рис.2.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10		1	2		1	2		1	2	
9	3	1	2	5	1	2	3	1	2	5
8	4	1	2	6	1	2	4	1	2	6
7		1	2		1	2		1	2	
6	5	1	2	3	1	2	5	1	2	3
5	6	1	2	4	1	2	6	1	2	4
4		1	2		1	2		1	2	
3	3	1	2	5	1	2	3	1	2	5
2	4	1	2	6	1	2	4	1	2	6
1		1	2		1	2		1	2	

рис.1

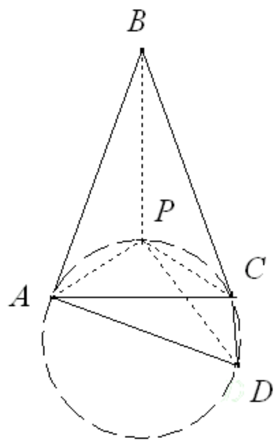
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	21			24	1	11	29			32
9	22			25	2	12	30			33
8	23			26	3	13	31	6	16	34
7	24	1	11	21	4	14	32	7	17	29
6	25	2	12	22	5	15	33	8	18	30
5	26	3	13	23	6	16	34	9	19	31
4	27	4	14	28	7	17	35	10	20	36
3		5	15		8	18				
2					9	19				
1	28			27	10	20	36			35

рис.2

11. Натуральное число n назовём *хитрым*, если выполняется неравенство $S(n)>2019\cdot S(3n)$, где $S(a)$ – сумма цифр числа a. Найдите наименьшее *хитрое* число. **(<u>N=1010-значное число, на 1 большее числа из одних шестёрок, – 666…667</u>. Тогда выполняется требуемое нам неравенство $S(n)$= 6061>6057=2019·3=2019·$S(3n)$, т.к. $3n$=200…001 имеем сумму цифр 3. Заметим, что по признаку делимости на 3 сумма цифр числа $3n$ будет кратна 3. Если она хотя бы 6, то $S(n)>2019\cdot 6\geq 2019\cdot S(3n)$, тогда в числе n цифр будет не менее [2019·6:9]=1346, что даст число, большее N. При $S(3n)=3$ перебор возможного вида числа $3n$ (300…, 200..00100..0, 100..00200..0, 100..00100…00100…00 – куски из нулей могут быть пустые) показывает, что в числе n цифр будет больше 1010, кроме приведённого нами ответа.)**

12. В ряд стоят 12 стульев. Сколькими способами их можно разбить на группы подряд стоящих так, чтобы количество стульев в каждой группе было нечётным? **(<u>F_{12}=144 – 12-й член последовательности Фибоначчи</u>, где $F_0=F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. Пусть a_n - ответ в нашей задаче в общем случае для n стульев. Докажем методом математической индукции, что $a_n=F_n$. База индукции для a_1 и a_2 легко проверяется. Рассмотрим теперь a_{n+1}. В последней группе любого способа будет либо 1, либо нечётное число, не меньшее 3. Тогда первых способов будет a_n, где мы убираем последнюю группу, а вторых способов будет a_{n-1}, где мы уменьшаем последнюю группу на 2 сидения. Получаем, что $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, что даёт нам выполнение главного рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи. Значит, согласно принципу математической индукции мы получаем, что $a_n=F_n$. <u>*Комментарий*</u>*:* Полезно помнить, что $F_{12}=144=12^2$. Иногда в задачах со 144 элементами это число даёт выход на числа Фибоначчи.)**

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, отличном от дельтоида, $AB=BC$, $\angle B=40°$, $\angle D=50°$ и биссектрисы углов A, B и D пересекаются в точке P. Найдите $\angle A$. **(<u>90°:</u>☺. Заметим, что биссектриса угла B в равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) является серединным перпендикуляром к AC, тогда точка P является серединой малой дуги AC описанной окружности треугольника ACD, как точка пересечения серединного перпендикуляра к AC и биссектрисы угла ADC. Тогда $\angle APC=180°-\angle ADC=180°-50°=130°$, $\angle PAC=(180°-\angle APC)/2=25°$, $\angle BAP=(180°-\angle ABC)/2-\angle PAC=70°-25°=45°$, $\angle BAD=2\angle BAP=90°$. <u>*Замечание*</u>: Но тогда $\angle BCD=360°-\angle A-\angle B-\angle D)=360°-90°-40°-50°=180°$, т.е. четырёхугольник $ABCD$ на самом деле является треугольником ABD – противоречие с условием задачи. Значит, <u>условие задачи некорректно</u>.)**



14. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $a^2+2b=b^2+c^2$, если числа a, b и c не превосходят 100 и удовлетворяют условию $a^2+bc < ab+ac$? **(<u>98</u>. Исходное неравенство $a^2+bc < ab+ac \Leftrightarrow 0<(a–b)(c–a)$, значит, число a расположено между b и c. Рассмотрим оба случая, учитывая, что числа – натуральные. 1). $b<a<c \Rightarrow b^2+c^2 \geq b^2+(a+1)^2 = b^2+a^2+2a+1 > b^2+a^2+2b > a^2+2b$. 2). $c<a<b \Rightarrow b^2+c^2 = b^2–2b+1+2b+(c^2–1) \geq (b–1)^2+2b \geq a^2+2b$, причём равенство возможно только при $c=1$, $b=a+1$, т.е. уравнению удовлетворяют 98 троек (2, 3, 1), (3, 4, 1), …, (99, 100, 1).)**

15. На какую наибольшую степень двойки делится сумма всех n-значных чисел, в которых встречаются только единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1? **(<u>$k+2$ при чётном $n=2k$ и $k+1$ при нечётном $n=2k+1$</u>. В каждом числе чередуются 2 и нечётная цифра (1 или 3). Разобьём все числа на пары, когда у одного стоит 1, то у другого 3, и наоборот, а 2 у них стоят в одних и тех же разрядах, например, 123232 и 321212. Тогда в каждой паре сумма равна числу, состоящему из n четвёрок, всего чисел $2\cdot2^k$, если $n=2k$ – чётное, и 2^k+2^{k+1}, $n=2k+1$ – нечётное, т.к. два вида чередования чётности и по 2 варианта нечётной цифры (1 или 3) в каждом из разрядов, предназначенных для них. Значит, вся сумма равна $\underbrace{44...4}_{2k}\cdot 2\cdot 2^k/2=2^{k+2}\cdot\underbrace{11...1}_{2k}$ при чётном $n=2k$ и $\underbrace{44...4}_{2k+1}\cdot(2^k+2^{k+1})/2=2^{k+1}\cdot\underbrace{33...3}_{2k+1}$ при чётном $n=2k+1$.)**

16. В университет поступили 200 студентов, которым на выбор было предложено k спецкурсов. Оказалось, что: 1) у любых двух студентов наборы курсов различны, 2) у любых двух студентов есть общий спецкурс, 3) нет спецкурса, изучаемого всеми студентами. При каком наименьшем k такое возможно? **(<u>9</u>. Пронумеруем спецкурсы числами от 1 до k. Закодируем двоичным k-значным кодом каждого студента, где 1 в соответствующем разряде означает, что данный курс выбран студентом, 0 – нет. У всех студентов разные коды, т.к. наборы курсов у студентов различны. Если курсов не более 7, то кодов не более $2^7=128<200$ – противоречие. Если курсов 8, то кодов – $2^8=256$. Разобьём все их на пары дополняющих друг друга до полного кода из 8 единиц: 10000000↔01111111, 11000000↔001111111 и т.д. (где у одного 1, у другого – 0, и наоборот). Всего таких пар 128, значит, найдутся коды из одной пары, но они не пересекаются, следовательно, соответствующие им студенты не имеют общего курса, – противоречие. Значит, курсов не менее 9. Для 9 спецкурсов в качестве примера возьмём 200 из всех кодов, содержащих 5 или 6 единиц. Количество таких кодов равно $C_9^5+C_9^6=C_{10}^6=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=210>200$, т.е. их хватает на 200 студентов. При этом любые два студента в сумме изучают не менее 10 спецкурсов из 9 имеющихся, т.е. у них обязательно есть общий спецкурс. При этом у них у всех вместе нет общего спецкурса т.к. иначе количество таких студентов-кодов было бы не больше $C_8^4+C_8^5=C_9^5=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=126<200$.)**