Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орленок», 20–28.09.2019

Бой № 1. 22.09.2019. Лига Гранд.

1. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Пусть K — точка пересечения BC с внешней биссектрисой угла BAC, а E — середина дуги BAC. Докажите, что K — ортоцентр треугольника II_aE.

2. Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$ и $a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ при всех $n > 1$. Найдите все n, для которых a_n делится на $n!$.

3. Ваня и Максим играют в игру на доске 6×2019, делая ходы по очереди. Начинает Максим. За ход игрок красит некоторую клетку (еще не покрашенную к этому моменту). Проигрывает тот, после чьего хода впервые в некотором клетчатом квадрате 3×3 появятся две покрашенные клетки. Кто имеет выигрышную стратегию?

4. Даны различные натуральные числа $a > 1$ и $b > 1$. Простое число p называется *хорошим*, если для некоторого натурального n число $a^n + b^{n+1}$ делится на p. Докажите, что существует бесконечно много хороших простых чисел.

5. Различные ненулевые вещественные числа x, y, z удовлетворяют условию $\dfrac{x^2 - yz}{x(1-yz)} = \dfrac{y^2 - xz}{y(1-xz)}$. Докажите, что
$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

6. Точки M и N – середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что
$$AB + CD \leq \max(AM + DM, BN + CN).$$

7. Положительные числа a, b, c меньше 1. Докажите, что
$$a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + 2\sqrt{abc}.$$

8. Дано натуральное n. Назовем $(n+1)$-элементное подмножество A множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ *нескладным*, если для любых различных $a, b, c \in A$ выполнено $a + b \neq c$. Найдите количество нескладных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$.

9. Даны 12 вещественных $x_1, \ldots, x_{12}$, каждое из которых больше 1. На числовой прямой отмечаются точки, соответствующие числам вида $\pm x_1 \pm x_2 \ldots \pm x_{12}$. Докажите, что ни на какой отрезок длины 2 не может попасть больше 1000 отмеченных точек.

10. Пусть k и n – натуральные числа. Рассмотрим функции f, определенных на подмножествах множества $\{1, 2, \ldots n\}$ и принимающих значения в $\{1, 2, \ldots k\}$ (всего таких k^{2^n}). Обозначим через a_n число таких функций, удовлетворяющих условию $f(A \bigcap B) = \min(f(A), f(B))$ при любых $A, B \subset \{1, 2, \ldots n\}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{k^{n+1}}$.