Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Финал. 27.09.2019
Высшая юниорская лига (9 класс).

1. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, обладающих следующим свойством: существует натуральное n такое, у чисел na и nb одинаковое количество натуральных делителей.

2. Пусть «←» означает соответствующую клавишу на клавиатуре (сдвиг курсора на одну позицию влево). Если в текстовом редакторе последовательно нажать клавиши «ab←cd←←e←←f», то получится «faecdb». Назовём строку B *достижимой* из строки A, если можно вставить в A несколько ← так, что после вбивания получится строка B. Докажите, что B достижима из A тогда и только тогда, когда A достижима из B.

3. a, b, c, d — неотрицательные числа такие, что $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$. Докажите, что $\frac{a+b+c+d}{2} \geqslant 1 + \sqrt{abcd}$

4. Дано n линейных функций $f_1, \dots f_n$. Известно, что квадрат каждой из них больше суммы остальных линейных функций при любом значении x. Докажите, что среди этих функций есть невозрастающая.

5. Рассмотрим все натуральные числа n, имеющие ровно 2019 делителей. Для каждого такого числа определим

$$S_n = \frac{1}{d_1 + \sqrt{n}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{d_{2019} + \sqrt{n}},$$

где $d_1, \dots d_{2019}$ — все натуральные делители числа n. Найдите наибольшее значение S_n.

6. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Биссектриса, проведенная из точки A, пересекает сторону BC в точке E. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Точка M — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Прямые DI и AM пересекаются в точке F. Докажите, что прямая MI проходит через середину отрезка EF.

7. Разбиение выпуклого n-угольника на треугольники назовём *правильной триангуляцией*, если никакие три вершины треугольников разбиения не лежат на одной прямой. Правильную триангуляцию назовём *хорошей*, если на сторонах всех треугольников можно расставить стрелки таким образом, чтобы на сторонах каждого треугольника и на сторонах исходного многоугольника стрелки образовывали циклы. При каких $n \geq 3$ у правильного n-угольника существует хорошая правильная триангуляция?

8. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC, в котором $AB < AC < BC$. Точка D – середина дуги AB. Прямая AD пересекает BC в точке E. Описанная окружность треугольника BDE вторично пересекает AB в точке Z, а описанная окружность треугольника ADZ вторично пересекает AC в точке H. Докажите, что $BE = AH$.