XVI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».

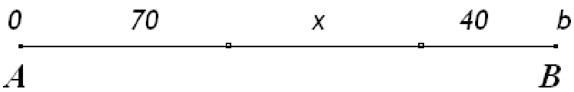
***Младшая лига (6-8 классы).*** **Решения.** ***10 сентября 2020 года.***

**1.** Какое наименьшее количество знаков арифметических действий можно поставить в левой части ребуса *COVID*=19, чтобы после некоторой замены букв цифрами получилось верное равенство с различными цифрами? Приведите ответ и пример. **(1 знак – деления, 608:32=19)**

**2.** Какое наибольшее количество полуладей (бьёт в двух направлениях) можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакая полуладья никакую не била? *Приведите ответ и пример (с указанием направлений ударов полуладей).* **(16. Каждая полуладья бьёт в двух направлениях свои стенки, которых на краю ровно 4·8=32, значит, будет не более 32:2=16 полуладей, которые можно поставить, например, на двух главных диагоналях так, что в каждом угловом квадрате 4×4 четыре ладьи этого квадрата бьют в направлении ближайших двух стенок.)**

**3.** В очереди в магазине стоят два человека: взрослый и ребёнок. К ним подошли ещё 10 человек, каждый из которых не хочет стоять в конце очереди, поэтому они встают между двумя уже стоящими. Назовём человека *рисковым*, если он встаёт между двумя людьми из другой возрастной группы. Когда все люди выстроились в очередь, оказалось, что взрослые и дети стоят, чередуясь. Сколько из них были *рисковыми*? **(5. Назовём пару рядом стоящих людей *хорошей*, если в этой паре стоят люди разного возраста. Если человек встаёт между людьми своего возраста, то количество *хороших* пар не изменяется. Если человек встаёт между людьми разных возрастов, то одна *хорошая* пара “разрывается” и одна новая создаётся. Если же человек был *рисковым*, то он создал две новых *хороших* пары. Таким образом, только *рисковые* люди изменяют количество *хороших* пар. Итак, изначально есть одна *хорошая* пара, в конце мы имеем 11 *хороших* пар. Значит, *рисковых* людей было (11–1)/2=5.)**

**4.** Андрей выехал из города *А*, доехал до города *Б*, провел там ровно час, после чего выехал домой в *А*. Его друг Боря выехал из города *Б* в тот же момент, когда и Андрей из *А*, доехал до города *А*, провел там час и вернулся в *Б*. Оба путешественника двигались с постоянной скоростью (скорости Андрея и Бориса могли быть разными). Их первая встреча произошла в 70 км от города *А*, а вторая — в 40 км от города *Б*, причём оба уже возвращались домой. Найдите расстояние между *А* и *Б*.




**(170 км. Введём на числовой прямой координаты у точек *А* и *Б* – 0 и *b*=70+*x*+40=110+*x*, где 70 и *b*–40 – точки встречи путешественников (число *x* может оказаться и отрицательным). Заметим, что проведённый час в каждом городе можно фактически убрать из рассмотрения, считая, что путешественники сразу возвращались в свой город. Тогда отношения скоростей путешественников равны отношению их путей до мест встречи, т.е.** $\frac{70}{x+40}=\frac{70+x+2\cdot 40}{40+2x+2\cdot 70}$**, откуда по свойству ряда равных отношений** $\frac{70}{x+40}=\frac{150+x}{180+2x}=\frac{150+x-2\cdot 70}{180+2x-2(x+40)}=\frac{10+x}{100}$ **и далее по свойству пропорции (10+*x*)(*x*+40)=70·100 – получаем квадратное уравнение, которое имеет два корня, которые находятся очевидным подбором: 60 и (–110). Но при *x* = –110 получим *b*=0, т.е. города совпадают, что невозможно. Значит, *x* = 60, откуда расстояние между городами *b*=110+60=170. Заметим также, что подобная ситуация могла возникнуть, например, при скоростях 70 км/ч и 100 км/ч.** ***Комментарий 1***: *Уравнение (10+x)(x+40)=70·100, конечно же, можно было решить либо через дискриминант, либо выделением полного квадрата.* $(10+x)(x+40)=70\cdot 100 \Leftrightarrow x^2+50x+400=7000 \Leftrightarrow$

$x^2+2\cdot 25x+25^2=7000-400+625 \Leftrightarrow (x+25)^2=7225=85^2 \Leftrightarrow x+25=\pm 85$, откуда $x\in\{60, -110\}$. *И, конечно, подбор возможных корней тоже является действенным, в том числе, с помощью теоремы Виета. Также можно было сослаться на то, что при положительных x с ростом x левая часть* $\frac{70}{x+40}=\frac{10+x}{100}$ *убывает, а правая растёт, значит, равенство возможно только при одном x, подбором найти x=60. Отрицательные x рассмотреть отдельно.* ***<u>Комментарий 2</u>***: *Задача на движение, значит, на постоянство отношений скоростей и путей, тогда в выкладках, возможно, поможет свойство ряда равных отношений (см. книгу Понарина «Элементарная геометрия. т.1.» – с.16). В этой задаче свойство ряда равных отношений только слегка упростило выкладки, но в других задачах оно могло сыграть существенную роль.*)

## §2. *Пропорциональные отрезки*

**2.1. Свойство ряда равных отношений.** Если имеем ряд равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k,$$

то $a_i=kb_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — любые действительные числа, при которых $t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n\neq 0$. Тогда $t_1a_1=t_1kb_1$, $t_2a_2=t_2kb_2, \ldots, t_na_n=t_nkb_n$. Сложив эти равенства, получим: $t_1a_1+$ $+t_2a_2+\ldots+t_na_n=k(t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n)$, откуда

$$\frac{t_1a_1+t_2a_2+\ldots+t_na_n}{t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n}=k=\frac{a_i}{b_i}, \quad \text{где } i=1, 2, \ldots, n. \qquad (2.1)$$

**5.** На десяти карточках написаны числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5. Положите эти карточки в ряд так, чтобы между единицами лежала одна карточка, между двойками – две, между тройками – три, между четвёрками – четыре, между пятёрками – пять карточек. **(<u>Это невозможно сделать</u>. *<u>Комментарий</u>*: Предлагаем читателю самостоятельно доказать это с помощью классической олимпиадной идеи «ЧЁТНЫЙ – ЧЁРНЫЙ»!)**

**6.** В футбольном турнире принимали участие пять команд. Каждая команда сыграла с каждой одну игру и все набрали разное число очков. Какое место могла занять команда, набравшая 8 очков, если за победу даётся три очка, за ничью – одно, за поражение – ноль? **(<u>Первое или второе место</u>. 8=2·1+2·3 очков в 4-х матчах можно набрать единственным способом (2 ничьи и 2 победы). Команда *A* с 8-ю очками могла быть чемпионом – см. таблицу 1. Если *A* – не чемпион, то чемпион *B* либо проиграл команде *A*, выиграв остальные матчи (тогда это 9 очков, значит, *A* – вторая), либо сыграл вничью с *A* и выиграл остальные свои матчи. Тогда любая другая команда проиграла *B* и не выиграла у *A*, значит, набрала не более 1+2·3=7 очков. Значит, команда *A* могла быть ещё второй. Пример такого турнира – см. таблицу 2.)**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | оч |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 3 | 1 | 3 | 1 | 8 |
| 2 | 0 | | 1 | 3 | 3 | 7 |
| 3 | 1 | 1 | | 3 | 1 | 6 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 2 |

табл.1

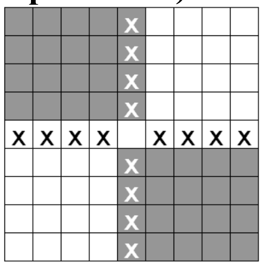
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | оч |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 0 | 3 | 3 | 3 | 9 |
| 2 | 3 | | 1 | 3 | 1 | 8 |
| 3 | 0 | 1 | | 3 | 3 | 7 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | | 3 | 3 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 1 |

табл.2

**7.** Приведите пример семи различных положительных чисел таких, что каждое из них равно трети произведения каких-то двух других. **(Например, подойдут числа $3^{-2}=\frac{1}{9}$, $3^{-1}=\frac{1}{3}$, $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$. Тогда** $\frac{1}{9}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{3}, \frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{9}\cdot 9}{3}, 1=\frac{\frac{1}{3}\cdot 9}{3}, 3=\frac{1\cdot 9}{3}, 9=\frac{1\cdot 27}{3}, 27=\frac{1\cdot 81}{3}, 81=\frac{9\cdot 27}{3}$ **.)**

**8.** Приведите хотя бы 8 целочисленных решений уравнения $a^2+b^2=1945$. **(По числам 44 и 3 создаём за счёт знаков плюс, минус и перестановок местами ровно $8=2^3$ решений.)**

**9.** Каждая клетка квадрата 9×9 окрашена в чёрный или белый цвет. Клетка называется *доминирующей*, если как в её строке, так и в её столбце больше половины клеток её цвета. Приведите пример, когда доминирующих клеток окажется меньше 17. **(На рисунке крестиком отмечены все доминирующие клетки – клетки (8 белых) из средней строки и клетки (8 чёрных) из среднего столбца, кроме центральной клетки.)**



**10.** На уроке физкультуры все ученики 7[а] класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 48% учеников 7[а] класса – мальчики. Найдите количество девочек в 7[а] классе. **(<u>13 девочек</u>. Пусть стоят $m$ мальчиков, но их 48%, т.е. меньше половины, значит, девочек больше, а шеренга начинается и заканчивается девочками в силу того, что мальчики и девочки чередуются. Значит, девочек больше ровно на 1 и их количество равно $m+1$. Тогда мальчики составляют $m/(2m+1)=0{,}48$ всего количества учеников. Из полученного уравнения найдём $m=12$.)**

**11.** Дата 02.02.2020 читается одинаково слева направо и справа налево (если не обращать внимания на точки) и является последней датой такого вида. А сколько всего таких дат случилось от начала нашей эры до сегодняшнего дня, если считать все года по дням и месяцам аналогичными современному? *Даты содержат не менее 5 цифр.* **(<u>212</u>. Перебор показывает, что это 6 дат вида *ab*.02.20*ba* (*ab* принимает значения 01, 02, 10, 11, 20, 21), 30 дат вида *ab*.11.11*ba*, 31 дата вида *ab*.01.10*ba*, 31 дата вида *ab*.10.1*ba*, 30 дат вида *ab*.11.1*ba*, 31 дата вида *ab*.12.1*ba*, 27 дат вида *ab*.11.*ba* ($b\neq0$) и 26 дат вида *ab.cb.a*, где $a\neq0$ (по 3 даты для двух месяцев $cb\in\{01, 10\}$ и по 2 даты для остальных 10 месяцев *cb*). Всего получаем 6+30+31+31+30+31+27+26=212, если, конечно же, мы нигде не ошиблись в переборе и подсчёте:☺.)**

**12.** В комнате находятся 12 человек, среди которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый из находящихся в комнате сказал две фразы: «Среди моих знакомых в этой комнате не более пяти рыцарей». «Среди моих знакомых в этой комнате ровно четыре лжеца». Сколько может быть рыцарей в этой комнате? **(<u>8 рыцарей</u>. Если нет рыцарей, то все – лжецы и тогда они сказали верную фразу про рыцарей, – противоречие. Значит, рыцари есть и каждый из них знает ровно 4 лжецов, при этом каждый лжец в силу лживости фразы о рыцарях знаком хотя бы с 6-ю рыцарями, а всего рыцарей не больше 12–4=8. Если рыцарей не более 7, значит, пар знакомых лжецов и рыцарей не больше 7·4=28, тогда хотя бы один из лжецов, которых в этом случае не меньше 5, по принципу Дирихле знаком максимум с [28:5]=5 рыцарями – противоречие с лживостью фразы лжеца про рыцарей. Значит, рыцарей ровно 8, а лжецов – 4. И такая ситуация могла быть, когда каждый из 8 рыцарей знаком с каждым из 4 лжецов, а сами рыцари и сами лжецы между собой не знакомы.)**

**13.** Вова хочет вырезать из доски 5×5 одну клетку, а все оставшиеся обойти ходом шахматного коня, побывав в каждой клетке ровно по одному разу. Сколькими способами он может вырезать эту клетку? **(<u>13 способов</u>. При шахматной раскраске конь меняет цвет клеток, значит, надо вырезать одну из чёрных клеток, которых будет больше, если мы считаем угловые клетки чёрными. При этом для любого варианта вырезанной чёрной клетки есть свой маршрут ходов коня – см. рис., где с точностью до симметрии и поворота указаны 4 варианта возможной вырезанной клетки.)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 13 | 8 | 19 | 2 |
| 23 | 18 | 1 | 14 | 9 |
| 12 | 7 | 24 | 3 | 20 |
| 17 | 22 | 5 | 10 | 15 |
| 6 | 11 | 16 | 21 | 4 |

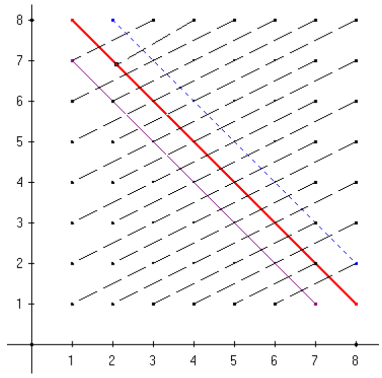
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | | 20 | 7 |
| 24 | 19 | 8 | 15 | 12 |
| 9 | 2 | 13 | 6 | 21 |
| 18 | 23 | 4 | 11 | 16 |
| 3 | 10 | 17 | 22 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 9 | 20 | 3 |
| 24 | | 2 | 15 | 10 |
| 13 | 8 | 19 | 4 | 21 |
| 18 | 23 | 6 | 11 | 16 |
| 7 | 12 | 17 | 22 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 9 | 20 | 3 |
| 24 | 19 | 2 | 15 | 10 |
| 13 | 8 | | 4 | 21 |
| 18 | 23 | 6 | 11 | 16 |
| 7 | 12 | 17 | 22 | 5 |

**14.** На плоскости размещены квадрат, круг и треугольник так, что квадрат пересекается с кругом, но не пересекается с треугольником, а круг пересекается с треугольником. Вместе они заняли площадь 1000 см$^2$, площадь треугольника 333 см$^2$, площадь круга 777 см$^2$, площадь пересечения квадрата и круга равна 120 см$^2$, площадь пересечения круга и треугольника равна 111 см$^2$. Найдите периметр квадрата (в сантиметрах). **(<u>44</u>. Пусть *S* – общая занятая площадь, *K, O, T* – площади квадрата, круга и треугольника соответственно, *A*, *B* – площади пересечения квадрата и круга, круга и треугольника соответственно. Тогда *K*+*O*+*T*–*A*–*B*=*S*, откуда *K*=121, тогда периметр квадрата равен 44.)**

**15.** На складе лежит 100 различных пустых коробок. Каждая коробка имеет квадратное основание. Ширина и высота коробки — натуральные числа от 1 до 10. Одна коробка помещается в другую, если оба размера (и ширина, и высота) первой коробки меньше соответствующих размеров второй коробки, а какой-то размер меньше хотя бы на два. Кладовщик хочет собрать из этих коробок несколько стопок. Каждую стопку он складывает по следующему принципу: он берет какую–то одну коробку, вкладывает в неё вторую, затем во вторую коробку вкладывает третью и т. д. (в стопке может быть любое число коробок начиная с единицы). В какое наименьшее количество стопок он сможет сложить коробки? **(<u>28</u>. Решим в общем виде для *n*$^2$ коробок со сторонами от 1 до *n*. Выделим на плоскости решётку из точек с целыми координатами (*x*. *y*) в пределах от 1 до *n*, каждая из которых соответствует коробке (ширина и высота) – см. рис. для *n*=8. Тогда каждой стопке соответствует своя «ломаная» (соседние звенья могут быть параллельны), где от точки с бо́льшими координатами сдвигаемся к точке с меньшими координатами, причём в сумме хотя бы на 1+2=3. Значит, каждая точка из трёх диагоналей нашей решётки (главная от точки (1, *n*) до точки (*n*, 1) и две соседних с ней, отмечены на рисунке красной толстой сплошной, пунктирной синей и тонкой фиолетовой линиями) лежит на своей «ломаной», т.к. на них суммы координат дают три последовательных числа *n*, *n*+1, *n*+2, значит, мы не можем с точки одной диагонали попасть на точку другой диагонали (сумма координат должна в этом случае уменьшиться хотя бы на 3). На этих трёх диагоналях стоит в общей сложности *n*+2·(*n*–1)=3*n*–2 точек, значит, у нас будет не менее 3*n*–2 «ломаных»–стопок. В качестве примера на 3*n*–2 «ломаных»–стопок подойдёт следующий. Проведём через каждую точку этих трёх диагоналей прямую вида $y=\dfrac{x-a}{2}$, где *a* принимает каждое целое значение от (1–2*n*) до (*n*–2) – ровно (3*n*–2) прямых. Каждая точка (*x*, *y*) с целыми координатами в пределах от 1 до *n* попадёт на одну из прямых.)**




**16.** Семья Петровых сидит дома на самоизоляции и пытается найти себе развлечение. Папа Василий предложил сыну Коле и дочери Ане загадать по натуральному числу. Дети загадали по числу и сообщили его папе, после чего он написал на одном листочке сумму этих чисел, а на другом – произведение. Один листок Василий спрятал, а другой показал детям, на этом листке было написано число 2020. Коля сказал, что не знает, какое число загадала Аня. Услышав это, Аня ответила, что тоже не знает, какое число загадал Коля. Какое число загадала Аня? **(<u>1010</u>. Так как Коля не знает, какое число загадала Аня, то его число – делитель 2020, в противном случае он бы знал, что папа показал сумму чисел, и определил бы число Ани. Аналогично число Ани является делителем 2020. Однако, даже зная, что Коля загадал делитель, Аня не может исключить, что 2020 – сумма. Но сумма делителей равна 2020 только в случае 1010 + 1010 (другие делители равны 2020 либо меньше 1010).)**