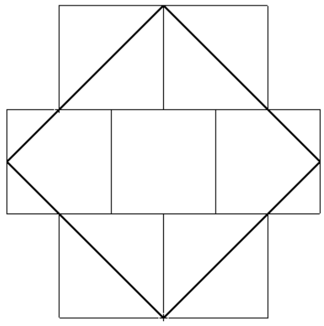
XVI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».

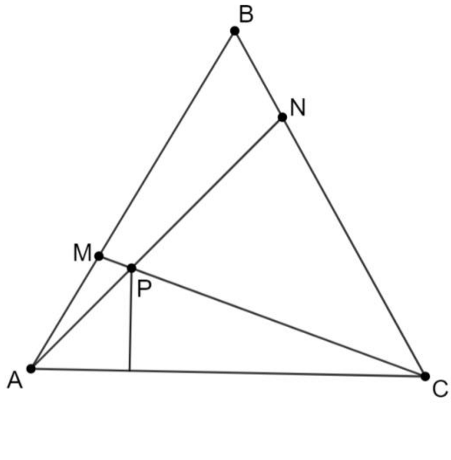
<u>Старшая лига (9-11 классы)</u>. **<u>Решения</u>.** ***10 сентября 2020 года.***



1. Как квадрат со стороной 21 покрыть семью квадратами со стороной 10? **(см. рис., где семь квадратов со стороной 10 закрывают квадрат со стороной $15\sqrt{2}$, что больше 21)**

2. Многочлен с целыми положительными коэффициентами $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ принимает значения, кратные 2020 при любом целом x. Найдите наименьшее возможное значение НОД(a,b,c,d,e). **(<u>505</u>. Подставляя x=0, получим, что e кратно 2020. Подставляя x=1, x=-1 и складывая или вычитая полученные выражения, а также учитывая, что e делится на 2020, получим, что $a+c$ делится на 1010 и $b+d$ делится на 1010. Подставим теперь x=2, x=-2, вычтем из одного выражения другое, откуда получим, что $16b+4d$ делится на 2020, но тогда $12b$ кратно 2020, а значит, b делится на 505. При сложении тех же выражений и учёта того, что e делится на 2020, получим, что $32a+8c$ делится на 2020, а значит, $24a$ делится на 2020, но тогда a кратно 505. Теперь можно заключить, что все числа делятся на 505. *<u>Пример</u>:* a=505, b=1010, c=505, d=2020, e=2020. Если x – чётное, то, очевидно, условие выполняется, если x – нечётное, то $x^4 \equiv x^2 \equiv 1$(mod.4), $1010x^3 \equiv 2$(mod.4), значит, сумма $ax^4+bx^3+cx^2$ кратна и 4, и 505, а значит, кратна 2020, но тогда и весь многочлен при действительных x принимает значения, кратные 2020.)**

3. В лагерь приехали 85 мальчиков и d девочек. Каждая девочка знакома не более чем с 15 мальчиками, а каждый мальчик – не менее, чем с одной девочкой. Оказалось, что у каждого мальчика больше знакомых девочек, чем у любой знакомой с ним девочки – знакомых мальчиков. Найдите наименьшее возможное d. **(<u>91</u>. Пусть каждая девочка привезла с собой в лагерь шоколадку. Но вдруг все девочки резко поняли, что им надо худеть ☺, поэтому каждая из них решила разделить поровну свою шоколадку между друзьями – мальчиками. Если мальчик дружит с n девочками, то каждая из этих n девочек дружит не более чем с n-1 мальчиком. А значит, любая из этих n девочек отдаст этому мальчику не меньше, чем $1/(n-1)$ долю от своей шоколадки. Следовательно, каждый мальчик получит не меньше $n/(n-1)$ долю шоколадки, но $n/(n-1) \geq 16/15$ (по условию $n-1 \leq 15$). Тогда суммарно шоколадок мальчики получили не меньше $16m/15$ (m – количество мальчиков), но с другой стороны, шоколадок ровно d. Значит, $d \geq 16m/15 > 90$. Пример предлагаем построить самостоятельно.)**



4. В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что AM:MB=1:2, BN:NC=1:3. AN и CM пересекаются в точке P. Известно, что расстояние от точки P до AC равно 3. Найдите высоту треугольника ABC. **(<u>10</u>. Пусть $\rho(X,YZ)$ – расстояние от точки X до прямой YZ. Тогда $\frac{\rho(P,AC)}{\rho(P,BC)}=\frac{\rho(M,AC)}{\rho(M,BC)}=\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}$=1:2, тогда $\rho(P,BC)$=6. Аналогично $\rho(P,AB)$=1. Согласно классическому факту сум-**

ма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника до его сторон равна высоте равностороннего треугольника. Значит, высота треугольника *ABC* равна 3+6+1=10. *<u>Комментарий:</u> Факт, о котором говорится в решении, также называется теоремой Вивиани.*)

5. Имеются 5 различных натуральных чисел. Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, к каждому произведению четырёх чисел и к произведению всех пяти чисел. Сумма всех выписанных чисел оказалась равна 1. *Приведите пример такой пятёрки чисел.* **(<u>5, 6. 7, 8, 9</u>. Решение в общем виде. Пусть $a_1=n$, $a_2=n+1$, ..., $a_n=2n-1$. Добавим к этой сумме 1, приведём всю сумму к общему знаменателю и получим после сворачивания скобок следующее равенство $\frac{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)}{a_1a_2...a_n}=2$, которое для нашего набора чисел в силу равенств $a_{k+1}=a_k+1$ для всех k в пределах от 1 до $n-1$ превратится в верное равенство $\frac{(a_n+1)}{a_1}=\frac{2n}{n}=2$.)**

6. Найдите расстояние от начала координат до множества точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+6x+8y-24=0$. **(<u>2</u>. Это расстояние от начала координат (точки *O*) до точки *B*, конца радиуса *AB*=7, на котором лежит точка *O*, где *A*(–3;–4) – центр окружности $(x+3)^2+(y+4)^2=49$, которой и является наша кривая, а $AO=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5<7$.)**

7. Найдите наибольший из коэффициентов a и b кубического многочлена x^3+ax^2+bx+3, имеющего три различных корня, два из которых являются корнями квадратного трехчлена x^2+2x-1. **(<u>–1</u>. Пусть t – третий корень кубического многочлена, отличный от корней трехчлена, тогда $x^3+ax^2+bx+3=(x-t)(x^2+2x-1)=x^3+(2-t)x^2+(-1-2t)x+t$, откуда $t=3$, $a=2-t=-1$, $b=-1-2t=-7$. При этом корень $t=3$ отличен от корней трехчлена.)**

8. Шахматную доску 8×8 разрезают на клетчатые прямоугольники ширины 1 так, чтобы произведение их площадей было максимальным, причём одна из частей оказалась клеткой 1×1. Скольками способами могла размещаться эта клетка? **(<u>4 способа</u>. Сведём задачу к общей формулировке с натуральными числами, дающими в сумме 63. Сначала все остальные 1 (кроме одной 1, которую мы из рассмотрения уберём) добавим к какому-нибудь числу (произведение станет больше). Если у нас есть число $n\geq5$ (прямоугольник $1\times n$), то заменим его числами 3 и ($n-3$), тогда $3\cdot(n-3)>n$ (что равносильно условию $n>4{,}5$, т.е. $n\geq5$) и произведение станет больше. Число 4 заменим на две 2 – произведение останется прежним. Таким образом, у нас остались только 2 и 3. Если есть хотя бы три двойки, то заменим их на две тройки и произведение станет больше, т.к. $2^3=8<9=3^2$. Значит, всё наше произведение будет равно степени 3, умноженной на одну или две двойки, в зависимости от остатка при делении на 3 (2 или 1). Но у нас числ0 63=3·21 кратно 3, значит, наибольшее**

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

рис.1

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

рис.2

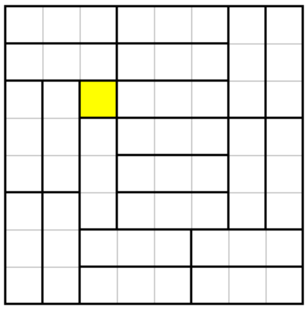
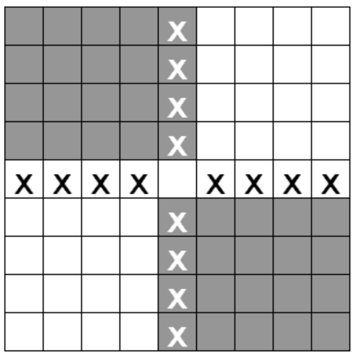


рис.3

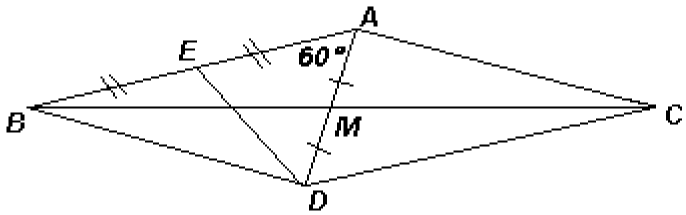
произведение будет равно 3^{21}. Таким образом, нам надо вырезать 21 триминошку. Если же раскрасить поле диагональной раскраской в 3 цвета (рис.1), то у нас второго цвета будет 22 клетки, значит, одна из них и будет свободной клеткой, т.к. каждая триминошка содержит по одной клетке каждого цвета. Но точно также это должна быть клетка второго цвета при диагональной раскраске в три цвета другого направления (рис.2). Таких клеток всего 4 – отмечены на рис.2. Пример разрезания методом пропеллера на 21 прямоугольник 1×3 при любой такой свободной клетке (с точностью до поворота) – см. рис.3.)

9. Все клетки доски $(2n+1)\times(2n+1)$ раскрашены в чёрный и белый цвета. Мы говорим, что клетка *доминирует* в своей строке или своём столбце, если клеток её цвета там больше половины. Какое наименьшее количество клеток может доминировать одновременно в строке и столбце? **(<u>$4n$</u>. Назовём ряд (строку и столбец) «*чёрным*» или «*белым*», если в нём доминируют чёрные или белые клетки соответственно, т.е. их в ряду не менее $n+1$. Пусть всего a и b «чёрных» столбцов и строк соответственно, $c=2n+1-a$ и $d=2n+1-b$ «белых» столбцов и строк. Введём также числа x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3, y_4 – количества чёрных и белых клеток соответственно на пересечении «чёрных» столбцов и «чёрных» строк, «чёрных» столбцов и «белых» строк, «белых» столбцов и «белых» строк, «белых» столбцов и «чёрных» строк. Тогда $x_1+y_1=ab$, $x_2+y_2=ad$, $x_3+y_3=cd$, $x_4+y_4=bc$, количество доминирующих клеток одновременно в строке и в столбце равно $S=x_1+y_3$, при этом выполняются неравенства $x_1+x_2\geq a(n+1)$, $x_1+x_4\geq b(n+1)$, $y_3+y_4\geq c(n+1)$, $y_2+y_3\geq d(n+1)$, т.к. в каждом из соответствующих рядов доминирования есть хотя бы $n+1$ клетка соответствующего доминирующего цвета. Сложим неравенства – первое с четвёртым и второе с третьим, перенесём по два слагаемых направо и получим, что $S=x_1+y_3\geq(a+d)(n+1)-(x_2+y_2)=(a+d)(n+1)-ad$ (1) и $S=x_1+y_3\geq(b+c)(n+1)-(x_4+y_4)=(b+c)(n+1)-bc$ (2) Сумма $a+b+c+d=2\cdot(2n+1)=4n+2$ и если с точностью до симметрии считать, что $a+d\geq b+c$, тогда $4n+2\geq t=a+d\geq 2n+1$ и неравенство (1) превратится в неравенство $x_1+y_3\geq t(n+1)-ad\geq t(n+1)-t^2/4$, т.к. по неравенству Коши $\sqrt{ad}\leq\frac{a+d}{2}=\frac{t}{2}\Leftrightarrow ad\leq\frac{t^2}{4}$. Тогда $x_1+y_3\geq t(n+1)-\frac{t^2}{4}=\frac{t}{4}(4n+4-t)=f(t)$. Исследуем квадратичную функции $f(t)$ при $t\in[2n+1;\ 4n+2]$. Если $t=a+d=4n+2$, то $a=d=2n+1$ – все столбцы будут «чёрными», а строки – «белыми», значит, на доске одновременно чёрных клеток больше, чем белых, а белых клеток больше, чем чёрных, – противоречие. Значит, $t\in[2n+1;\ 4n+1]$. В силу свойств параболы $f(t)=\frac{t}{4}(4n+4-t)$ с вершиной при $t=2n+2$ наименьшее значение на отрезке $[2n+1;\ 4n+1]$ будет при $t=4n+1$, т.к. $4n+1-(2n+2) = 2n-1> 1 = (2n+2)-(2n+1)$ при $n\geq 2$ (случай $n=1$ обсудим в самом конце). Но тогда, считая с точностью до симметрии $a=2n+1$, $d=2n$, получим, что чёрных клеток на доске не менее $(2n+1)(n+1)$, белых клеток – не менее $2n(n+1)$, а всего клеток будет не менее $(2n+1)(n+1)+2n(n+1)=(4n+1)(n+1)=4n^2+5n+1>4n^2+4n+1=(2n+1)^2$, т.е. больше, чем всё количество клеток на доске. Противоречие. Значит, $S\geq f(4n)=\frac{4n}{4}(4n+4-4n)=4n$. Если же $n=1$, то**

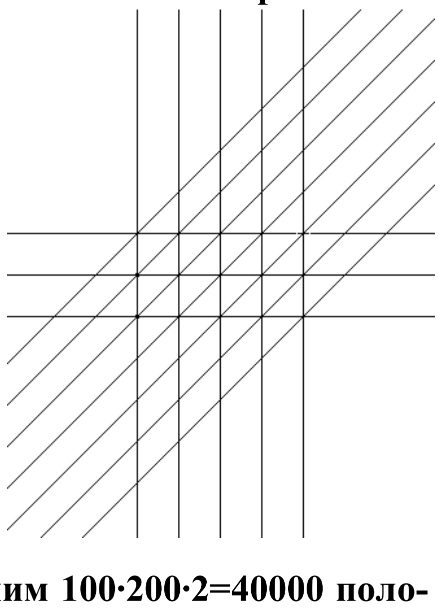


$S \geq f(4n+1)=f(5)=f(3)=f(2n+1)=\frac{3}{4}(4\cdot 1+4-3)=\frac{15}{4}>3$, **т.е. $S \geq 4=4n$. Таким образом, количество доминирующих одновременно в строке и столбце клеток $S \geq 4n$ при любом натуральном n. В качестве примера на $4n$ доминирующих клеток подойдёт следующий (см. рис. при n=4). Выделим в левом верхнем углу и правом нижнем углу чёрные прямоугольники из n строк и (n+1) столбцов, остальные клетки – белые, тогда доминирующими одновременно в строке и столбце клетками будут все клетки центрального столбца и центральной строки, за исключением самой центральной клетки, – всего $2n$ чёрных и $2n$ белых доминирующих клеток, в сумме $4n$, что нам и требуется.)**

10. В треугольнике *ABC* медиана, проведённая из вершины *A* к стороне *BC*, в четыре раза меньше стороны *AB* и образует с ней угол 60°. Найдите угол *BAC*. (**<u>150°</u>. Продлим медиану *AM* на её длину: *DM=AM*, тогда *ABDC* – параллелограмм (см. рис.). В треугольнике *ABD* проведем медиану *DE*, тогда $AE=\frac{1}{2}AB=AD$. Таким образом, треугольник *ADE* – равнобедренный с углом 60°, то есть *ADE* – равносторонний. Следовательно, в треугольнике *ABD* медиана *DE* равна половине стороны *AB*, к которой она проведена, значит, треугольник *ABD* – прямоугольный ($\angle ADB$ = 90°). Тогда $\angle CAD = \angle ADB = 90°$, $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 150°$.)**



11. На плоскости провели три попарно пересекающихся прямых *a, b, c*. Затем провели ещё 100 прямых, параллельных *a*, 200 прямых, параллельных *b*, и 300 прямых, параллельных *c*. На какое наименьшее число частей могли все эти прямые разбить плоскость? (**<u>91506 частей</u>. Рассмотрим сначала 101 прямых направления *a* (параллельных *a*) и 201 прямую направления *b* (параллельных *b*). Они разбили плоскость на клетчатую (параллелограммами) решётку с бесконечными частями на краю (всего 102·202=20604 части. Любая прямая направления *c* пересекает каждую прямую из 101+201=302 проведённых. Количество точек пересечения с этими прямыми (n) даст нам разбиение ровно n+1 части (за счёт бесконечных на краях) на две части. Значит, для минимизации количества частей необходимо, чтобы прямые направления *c* прошли через максимально возможное количество точек пересечения прямых направления *a* и направления *b*. Мы можем добиться того, чтобы они прошли через все такие точки. Приведём пример. Пусть у нас есть клетчатый прямоугольник 100×200, где линии сетки дают 101 и 201 прямых направлений *a* и *b*. Проведём теперь 301 прямую направления *c*, которые пройдут через каждый узел решётки прямоугольника, разбив каждую клетку пополам по диагонали (см. рис. для аналогичного случая (по 2, 4, 6 новых прямых). Получим 100·200·2=40000 половинок клеток, по 20100=1+2+…+200=201·100 ограниченных частей сверху и снизу, по 5050=1+2+…+100=101·50 ограниченных частей слева и справа и**



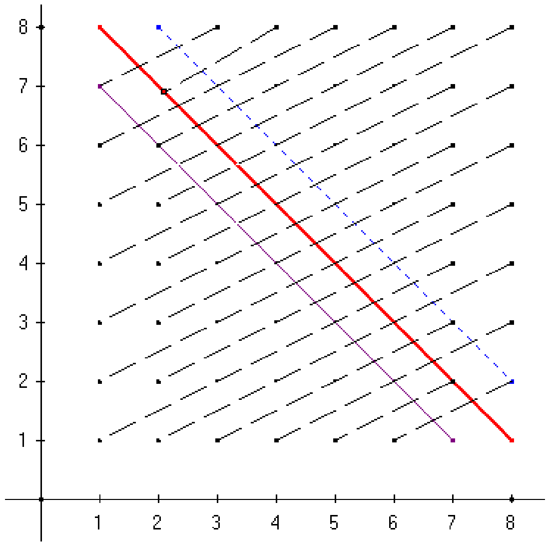
(101+201+301)·2=1206 неограниченных частей. Всего 40000+2·20100+2·5050+1206=91506.)

12. Приведите пример палиндрома (вместе с разложениями), меньшего 10^{12}, который можно разложить в произведение двух других палиндромов хотя бы 12-ю способами. (Натуральное число называется *палиндромом*, если оно больше 10 и равно числу, получаемому из данного перестановкой всех цифр в обратном порядке, например, 1209021). **(например, R_{12} = 111111111111 = 11·10101010101 = 111·1001001001=1111·100010001=111111·1000001 = $R_2 \cdot R_{6,1}$ = $R_3 \cdot R_{4,2}$ = $R_4 \cdot R_{3,3}$ = $R_6 \cdot R_{2,5}$. Если же теперь домножить число на 6, то можем получить в 4 раза больше разложений (т.е. 16), т.к. первый множитель можно домножить на 1, 2, 3 или 6, а второй соответственно на 6, 3, 2 и 1.)**

13. Дан треугольник площади S со сторонами $a \le b \le c$. Найдите площадь треугольника со сторонами a, $2b$ и $3c$. **(Такого треугольника не существует, т.к. не выполняется неравенство треугольника: $3c \ge 2b+a$ в силу условия $a \le b \le c$.)**

14. Найдите наибольшее натуральное число n, равное сумме двух различных натуральных делителей числа $n+10$. **(50. Ни один из этих делителей не может равняться $n+10$, и не может быть, чтобы они оба равнялись $(n+10)/2$. Поэтому их сумма не превосходит $(n+10)/2+(n+10)/3 = 5(n+10)/6$. Решая неравенство $5(n+10)/6 \ge n$, получаем $n \le 50$. $n=50$ подходит: 50=30+20, где 30 и 20 – делители числа $n+10=60$.)**

15. На складе лежит n^2 различных пустых коробок. Каждая коробка имеет квадратное основание. Ширина и высота коробки — натуральные числа от 1 до n. Одна коробка помещается в другую, если оба размера (и ширина, и высота) первой коробки меньше соответствующих размеров второй коробки, а какой-то размер меньше хотя бы на два. Кладовщик хочет собрать из этих коробок несколько стопок. Каждую стопку он складывает по следующему принципу: он берет какую–то одну коробку, вкладывает в неё вторую, затем во вторую коробку вкладывает третью и т. д. (в стопке может быть любое число коробок начиная с единицы). В какое наименьшее количество стопок он сможет сложить коробки? **(3n–2. Выделим на плоскости решётку из точек с целыми координатами (x. y) в пределах от 1 до n, каждая из которых соответствует коробке (ширина и высота) – см. рис. для n=8. Тогда каждой стопке соответствует своя «ломаная» (соседние звенья могут быть параллельны), где от точки с бóльшими координатами сдвигаемся к точке с меньшими координатами, причём в сумме хотя бы на 1+2=3. Значит, каждая точка из трёх диагоналей нашей решётки (главная от точки (1, n) до точки (n, 1) и две соседних с ней, отмечены на рисунке красной толстой сплошной, пунктирной синей и тонкой фиолетовой линиями) лежит на своей «ломаной», т.к. на них суммы координат дают три последовательных числа n, n+1, n+2, значит, мы не можем с точки одной диагонали попасть на точку другой диагонали (сумма координат должна в этом случае уменьшиться хотя бы на 3).**



На этих трёх диагоналях стоит в общей сложности $n+2\cdot(n–1)=3n–2$ точек, значит, у нас будет не менее $3n–2$ «ломаных»–стопок. В качестве примера на $3n–2$ «ломаных»–стопок подойдёт следующий. Проведём

через каждую точку этих трёх диагоналей прямую вида $y = \frac{x-a}{2}$, где *a* принимает каждое целое значение от (1–2*n*) до (*n*–2) – ровно (3*n*–2) прямых. Каждая точка (*x*, *y*) с целыми координатами в пределах от 1 до *n* попадёт на одну из прямых.)

16. Чему может быть равен периметр треугольника *ABC*, у которого *AB*=13 см, а высота из точки *A* разбивает противоположную сторону на отрезки 5 см и 9 см? **(42 см или $27+\sqrt{113}$ см. Возможны два случая (*BD*=5 или *BD*=9), в каждом из которых с помощью теоремы Пифагора найдём сторону *AC*.)**