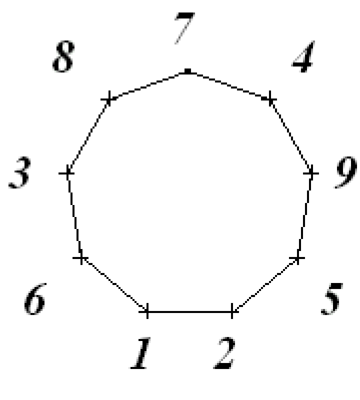
XVI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIII Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».

<u>Младшая лига.</u>* <u>Решения</u>. *11 сентября 2020 года.

1. Даны все целые числа от 1 до 101. Назовём число *крутым*, если оно является делителем суммы остальных чисел. Сколько всего крутых чисел? **(<u>5 крутых чисел</u>. Если к сумме остальных добавить само крутое число, то и вся сумма чисел от 1 до 101 разделится на это крутое число, значит, крутое число является делителем суммы** $1+2+3+...+101=\frac{102\cdot 101}{2}=51\cdot 101=3\cdot 17\cdot 101$. **Из разложения на простые множители 3·17·101 и условия, что числа от 1 до 101, следует, что крутыми будут числа 1, 3, 17, 51=3·17 и 101.)**

2. Ненулевые числа *x, y* и *z* удовлетворяют условиям $x+y+z=a$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Найдите $x^2+y^2+z^2$ (зависимость от *a*). **(<u>a^2</u>.** $0=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+zx+xy}{xyz}$, **значит,** $xy+yz+zx=0$, **тогда** $x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2=a^2$**.)**

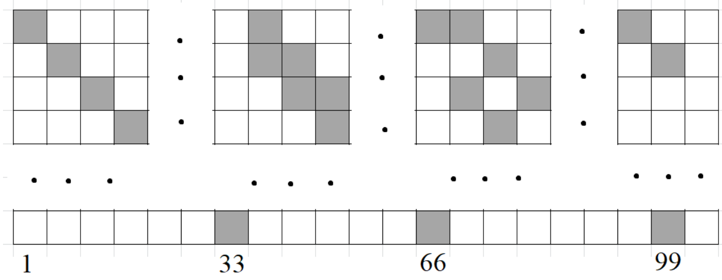
3. Дан правильный девятиугольник. В каждую его вершину сладкоежка Маша помещает конфеты (от 1 до 9 штук), причем количество конфет во всех вершинах различно. Петя выбирает три вершины девятиугольника, которые образуют вершины равнобедренного треугольника, и забирает расположенные в них конфеты себе. Остальные конфеты он отдаёт Маше. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно получить Маша? **(<u>25</u>. Хорду (сторону или диагональ) будем измерять количеством сторон между концами хорды по кратчайшему пути по контуру, длины хорд могут быть 1, 2, 3, 4. Тогда для хорды длины 1 существуют 3 равнобедренных треугольника, в которые она входит, – 2 треугольника 112 и 144, для хорды длины 2 – 112 и 2 треугольника 224, для хорды длины 3 – только один 333, для хорды длины 4 – 224 и 2 треугольника 144. Если числа 8 и 9 соединены хордой, не равной 3, то Петя может выбрать из трёх треугольников с такой хордой (8-9) тот, в котором третья вершина – наибольшая (т.е. не менее 3), значит, Петя добьётся для себя не менее 9+8+3=20 конфет, что Машу не устроит. Значит, у Маши числа 8 и 9 соединены хордой 3 и попадают в равносторонний треугольник *n*89, где Маша может сделать *n*≤2 и гарантировать Пете не более 2+8+9=19 конфет. Рассмотрим в этом случае любой другой треугольник с хордой 7-9 (он не может быть равносторонним), всего три таких треугольника и у них нет вершин 8 и *n*. Петя может выбрать из этих трёх треугольников с хордой (7-9) тот, в котором третья вершина – наибольшая (т.е. не менее 4), значит, Петя добьётся для себя не менее 9+7+4=20 конфет. Таким образом, Петя себе всегда гарантирует не менее 20 конфет, оставляя Маше не более 45–20=25. Приведём пример, когда Маша гарантирует себе не менее 25 конфет (см. рис.). Перебор всех треугольников с большими 20 суммами показывает, что они не будут равнобедренными – 987, 986, 985, 984, 976, 975, 876. Значит, Петя возьмёт себе не более 20 конфет, а Машин гарантированный выигрыш равен 25.)**



4. На контрольной в классе из 20 человек процент пятёрок оказался равен 20%. Какое количество различных средних баллов могло при этом оказаться, если были выставлены все виды оценок (2, 3, 4 и 5)? **(<u>27</u>. Есть четыре пятёрки (20%), 2, 3 и 4, т.е. 7 оценок. Остальные 13 оценок в сумме дадут от 2·13=26 до 4·13=52, причём любое целое число от 26 до 52 достижимо (по очереди двойки превращаем в пятёрки по алгоритму 2→3→4→5).**

Значит, сумма баллов принимает 52–25=27 возможных значений, отсюда 27 различных возможных средних баллов.)

5. Имеется клетчатая доска $k\times100$ (k строк, 100 столбцов). Петя загадывает один из столбцов, но не говорит его номер Васе. Вася закрашивает некоторые из клеток, причём так, что в каждой строке не более 5 клеток закрашено. После чего Петя называет номера строк, которые загаданный им столбец пересекает по закрашенным клеткам. При каком наименьшем k Вася точно сможет угадать, какой столбец загадал Петя? **(<u>При k=33</u>. Так как в каждой строке закрашено не более пяти клеток, то всего закрашенных клеток не более 5k. Оценим количество закрашенных клеток снизу. Нуль закрашенных клеток могут иметь не более одного столбца. Одну закрашенную клетку может иметь не более k столбцов, иначе по принципу Дирихле найдутся хотя бы два одинаковых столбца. Остальные 100–1–k столбцов имеют хотя бы две закрашенные клетки. Тогда всего закрашенных клеток не менее 0+k+2(100–1–k)=198–k. Значит, 5k≥198–k ⇔ k≥33. Приведём пример раскраски клеток на 33 строки. В столбцах с номерами 1≤i≤33 закрашены клетки в строках с номерами i. В столбцах с номерами 34≤j≤66 закрашены клетки в строках с номерами j–33, j–32 (в 66 столбце покрашены клетки из 33 и 1 строк). В столбцах с номерами 67≤l≤99 закрашены клетки в строках с номерами l–66, l–64 (в 98 столбце покрашены клетки из 32 и 1 строк, в 99 – из 33 и 2 строк). И наконец, в столбце с номером 100 нет закрашенных клеток. При такой раскраске в каждой строке не более 5 закрашенных клеток. Кроме того, любые два столбца различны.** ***<u>Комментарий</u>: Это переделка задачи №19 с ЕГЭ-2018 со скандальной формулировкой. См. также эту же задачу (№5 в старшей лиге), но с другой формулировкой.*****)**



6. В стране Повторляндии есть купюры в 5555 повториков и 33 повториков. Купюру в 5555 повториков жители называют пятаком, в 33 – трояком. Богач Пятёрочкин располагает только пятаками. Он пришёл в магазин «Троечка», где на данный момент в кассе лежат только трояки. Пятёрочкин хочет купить гинку за 363 повториков, шугрики за 1727 повториков, вецкот за 8888 повториков и заниян за 424242 повториков. Какие из вещей он не сможет купить? **(<u>Заниян</u>. Заметим, что и у Пятёрочкина, и в кассе находится количество повториков, кратное 11. Значит, Пятёрочкин точно не сможет купить заниян, так как стоимость занияна не кратна 11. Покажем, что все остальные вещи Пятёрочкин сможет купить. В самом деле, пусть x=5555, y=33, тогда согласно известному следствию из соотношения Безу существуют натуральные a и b, что ax-by=НОД(x,y)=11. Значит, если Пятёрочкин заплатит an пятаков, а сдача составит bn трояков, то он купит товар на 11n вториков. В частности, при n=33, n=157, n=808 Пятёрочкин сможет купить гинку, шугрики и вецкот соответственно.** ***<u>Комментарий:</u> Предлагаем самостоятельно доказать соотношение Безу и следствие из него, о котором говорится в решении. Если переставить буквы в слове «заниян», то получим слово «знания». В самом деле, ЗНАНИЯ не купишь: ☺ !*****)**

7. На острове живут 30 представителей двух племён — рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. У каждого из них ровно трое знакомых среди остальных. Каждый произнёс фразу: «Среди моих знакомых островитян не более одного моего соплеменника». Какое наибольшее количество рыцарей может быть среди них? **(<u>10 рыцарей</u>. Пусть у нас N рыцарей. Тогда у каждого рыцаря есть не более одного знакомого рыцаря и хотя бы два знакомых лжеца, что даёт нам не менее 2N пар знакомых между**

собой рыцаря и лжеца (всего *P* пар). У каждого лжеца, которые есть, будет больше одного лжеца среди знакомых, значит, знакомых рыцарей не более одного. Таким образом, пар знакомых между собой рыцаря и лжеца будет не более 30–*N* (максимум по одной у каждого лжеца). Получаем неравенство $2N \le P \le 30-N$, откуда $N \le 10$. Приведём пример на 10 рыцарей и 20 лжецов. Разобьём рыцарей на 5 пар, а лжецов поставим по кругу. Пусть каждый рыцарь знаком с рыцарем из своей пары и ещё с двумя лжецами, с которыми не знакомы другие рыцари; а каждый лжец знаком ровно с одним рыцарем и с двумя лжецами – своими соседями по кругу.)

8. Андрей закрашивает на белой доске 8×8 поочерёдно клетки, но красить он может только такие клетки, рядом (по стороне) с которыми в момент закрашивания есть хотя бы две незакрашенные клетки. Какое наибольшее количество клеток Андрей сможет покрасить по таким правилам? **(56. Решим задачу для доски $n \times n$. Рассмотрим перегородки между клетками, всего их $2n^2-2n$. Пусть как только Андрей красит клетку, он удаляет перегородки-стороны этой клетки. Заметим, что когда Андрей красит клетку, он удаляет хотя бы две перегородки. Тогда всего в конце закрашенных клеток не больше n^2-n. Приведём пример для доски 8×8, для других размеров он аналогичен.)**

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	56
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	55
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	54
43	44	45	46	47	48	49	
	50		51		52		53

9. Известно, что числа *a*, *b*, *c* и *d* – целые и $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{a+b}{c+d}$. Укажите наименьшее натуральное число *N*, большее 2020, для которого может выполняться равенство $abcd = N$. **(2025. Преобразуем данное равенство по свойству ряда равных отношений:**

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{(a-b)+(a+b)}{(c-d)+(c+d)}=\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{(a+b)-a}{(c+d)-c}=\frac{b}{d}.$$

Тогда $ad=bc$, тогда $abcd=(ad)^2$, а ближайшим точным квадратом после 2020 будет число $2025=45^2$, например, при … ***Пример приводить обязательно – задача типа «Оценка+пример».*****)**

10. При каких *N* на шахматную доску можно поставить 4 ладьи и *N* слонов так, чтобы каждая ладья била ровно 3 слонов и каждый слон был побит ровно 2 ладьями? *Приведите ответ и пример.* **(6, т.к. существует ровно $4 \cdot 3=12=N \cdot 2$ ударов ладей по слонам. Пример методом пропеллера см. на рисунке.)**

С	Л		С
Л		С	
	С		Л
С		Л	С

11. Назовём четырёхзначное число *n* *весёлым*, если каждую его цифру можно увеличить или уменьшить на 1 (при этом цифру 9 можно только уменьшать, а 0 – только увеличивать) так, чтобы в результате получилось число, делящееся на *n*. Найдите все весёлые числа. **(4 весёлых числа – 1111, 1109, 1091, 1089. Сумма $n \pm 1000 \pm 100 \pm 10 \pm 1$ должна делиться на четырёхзначное число *n*, значит, $n=1100 \pm 10 \pm 1$. Получаем всего 4 варианта: 1100+11=1111, 1110–1=1109, 1100–10+1=1091, 1100–10–1=1089.)**

12. Сколько двузначных чисел обладают таким свойством, что если к произведению цифр прибавить его сумму цифр, то получится само это число? **(9. Пусть двузначное число равно $\overline{ab}$, тогда $\overline{ab}=10a+b=ab+a+b$, откуда $9a=ab$, значит, $b=9$, т.к. *a* – ненулевая цифра. Тогда подойдут все двузначные числа вида $\overline{a9}$, а их ровно 9.)**

13. У Маши и Даши были два одинаковых прямоугольника. Каждая разрезала свой прямоугольник на два прямоугольника, при этом у Маши получились прямоугольники с периметрами 20 см и 30 см, а у Даши – прямоугольники с периметрами 25 см и 39 см. Чему равна большая сторона первоначального прямоугольника (в см)? (**13. Девочки разрезали изначальный прямоугольник размерами $a\times b$ и периметра $P=2(a+b)$ в разных направлениях, т.к суммарный периметр прямоугольников Маши равен $20+30=50=P+2a$, а у Даши – $25+39=64=P+2b$. Сложим эти 2 равенства и получим, что $114=2P+2a+2b=3P$, т.е. $P=38$. Тогда $a=(50-P)/2=6$, $b=(64-P)/2=13$.) Условие задачи некорректно, т.к. Даша не могла так разрезать.**

14. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Какое наименьшее количество ничьих могло быть у команды с наибольшим числом ничьих? (**4. Всего будет сыграно $C_{10}^2=\frac{10\cdot 9}{2}=45$ матчей, в которых разыграно максимум $45\cdot 3=135$ очков в случае отсутствия ничьих. Но команды набрали на $135-119=16$ очков меньше за счёт 16 ничьих, т.к. каждая ничья даёт в сумму вклад 2 очка, что на 1 очко меньше, чем победа-поражение, дающая в сумме 3 очка. Значит, всего у команд в сумме $16\cdot 2=32$ ничьи с учётом двойного подсчёта каждой ничьи (у двух команд). Так как $32>10\cdot 3$, то по принципу Дирихле среди 10 команд найдётся команда, у которой не меньше 4 ничьих. Пример такого турнира нетрудно построить (*предлагаем сделать это читателю самостоятельно*).)**

15. В городе *NN* оплата за транспорт действует следующим образом. При первой посадке с карточки пассажира списывается сумма R эннов, после чего в течение часа можно сделать бесплатно ещё максимум 5 пересадок в другой транспорт. При этом вся сумма R делится поровну между владельцами транспорта за каждую поездку, проведённую в этот период, но за каждую поездку владелец должен получить целое число эннов, не меньшее 15. При каком наименьшем R такое возможно? (**120 эннов. $R\geq 6\cdot 15=90$, т.к. за каждую из максимум 6 возможных поездок должно быть получено не менее 15 эннов, и R делится на НОК (1, 2, 3, 4, 5, 6)$=2^2\cdot 3\cdot 5=60$, значит, минимальное $R=120$, что очевидным образом устраивает всех владельцев транспорта.)**

16. Винтик измерил все стороны своей картонной коробочки в виде прямоугольного параллелепипеда и обнаружил, что: 1) все три стороны (a, b, c – длина, ширина и высота) имеют целую длину в см, 2) сумма объёма (в см^3) и всех трёх сторон (в см) равна 63, 3) суммарная площадь всей поверхности (в см^2) равна 124. Шпунтик утверждает, что у его коробочки такие же свойства, причём его коробочка (также прямоугольный параллелепипед) отличается от коробочки Винтика. Приведите пример таких двух коробочек. (**Например, эти коробочки имеют размеры $1\times 6\times 8$ и $1\times 2\times 20$. $abc+a+b+c=63$, $ab+bc+ca=62$ – половина площади поверхности, тогда $abc+a+b+c=ab+bc+ca+1$, откуда после переноса в левую часть равенства увидим, что левая часть раскладывается на множители $(a-1)(b-1)(c-1)=0$, откуда один из размеров (можно считать, что c) равен 1. Тогда первое уравнение примет вид $ab+a+b+1=63$, что равносильно равенству $(a+1)(b+1)=63$, где слева оба множителя являются натуральными числами, не меньшими двух, и дают в произведении $63=3\cdot 21=7\cdot 9$. Значит, две других стороны равны или 2 и 20, или 6 и 8. *Комментарий: на самом деле совсем нетрудно подобрать обе коробочки, устроив небольшой перебор при одном размере, равном 1.*)**