XVI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».

XIII Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».

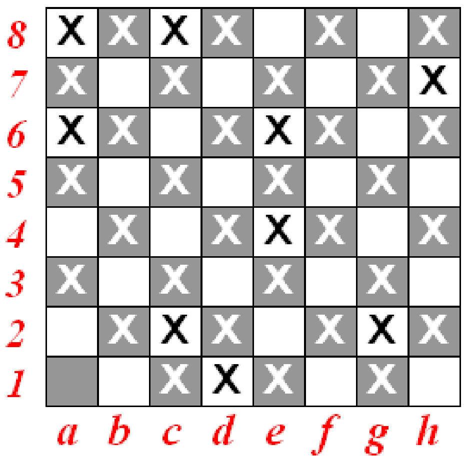
Старшая лига.* Решения. *11 сентября 2020 года.

1. Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения $\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{x^2}-1$.

(**$\sqrt{5}+1$. Подходят $x=\pm1$, разделим на $\sqrt{1-x^2}$, умножим на x^2, возведем в квадрат и получим уравнение $x^4=1-x^2$ при $-1<x<1$, которое решим как биквадратное и получим, что есть ещё 2 корня $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, тогда сумма квадратов наших четырёх корней равна $\sqrt{5}+1$.)**

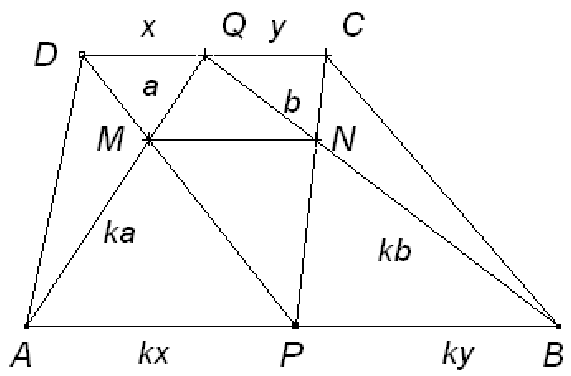
2. Пусть $S(n)$ — это сумма цифр натурального числа n. Сколько решений имеет уравнение $n=m\cdot S(n)$, где m – цифра? (**23 решения. Пусть $n=\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_2 a_1}$ – k-значное число, где $k\geq3$. Тогда уравнение $n=m\cdot S(n)$ равносильно уравнению $(10^{k-1}-m)\cdot a_k+\ldots+(100-m)\cdot a_3+(10-m)a_2=(m-1)a_1$, где левая часть не меньше $(10^{k-1}-m)\cdot a_k\geq10^2-9=91$, а правая часть не больше $9\cdot9=81$, т.е. при $k\geq3$ равенство невозможно. Однозначные натуральные числа (9 случаев) очевидным образом подходят только при $m=1$, значит осталось проверить только двузначное число $n=\overline{ab}$. Тогда наше уравнение равносильно уравнению $10a+b=m(a+b)$, откуда $(10-m)a=(m-1)b$, где перебор с делимостью показывает, что возможны следующие случаи: $8a=b\to18$; $7a=2b\to27$; $6a=3b\to12, 24, 36, 48$; $5a=4b\to45$; $4a=5b\to54$; $3a=6b\to21, 42, 63, 84$; $2a=7b\to72$; $a=8b\to81$. Значит, у уравнения всего $9+14=23$ решения.)**

3. При каких k можно отметить крестиками k клеток ($0\leq k\leq64$) доски 8×8 так, чтобы при любом разрезании доски на прямоугольники 1×2 было чётное число доминошек с двумя отмеченными клетками? (**При всех целых k от 0 до 64, кроме 63. Рассмотрим шахматную раскраску доски 8×8 и заметим, что каждая доминошка обязательно содержит одну чёрную и одну белую клетки. 1) При $k\leq32$ всегда будем ставить крестики на чёрные клетки, в результате у него будет 0 (чётное число) доминошек с двумя крестиками при любом разрезании на доминошки. 2) При чётном $k=2n+32$ в пределах от 34 до 64 (n – натуральное число в пределах от 1 до 16) сначала отметим крестиками все 32 чёрные клетки, а затем любые $2n$ белых клеток. В результате, ровно эти $2n$ белых клеток образуют доминошки с двумя крестиками при любом разрезании – чётное количество нужных нам доминошек. 3) При нечётном $k=2n+31$ в пределах от 33 до 61 (n – натуральное число в пределах от 1 до 15) сначала отметим крестиками 31 чёрную клетки без клетки $a1$, а затем любые $2n\leq30$ белых клеток в зоне между чёрными клетками, не затрагивая клетки $a2$ и $b1$ (см. рис.). В результате, ровно эти $2n$ белых клеток образуют доминошки с двумя крестиками при любом разрезании – чётное количество нужных нам доминошек, т.к. любая соседняя для отмеченной белой клетки чёрная клетка будет отмечена крестиком. 4) При $k=63$ ровно одна клетка не будет отмечена крестиком, как следствие, при любом разрезании**



ровно одна доминошка будет с одним крестиком, а остальные 31 доминошка (нечётное количество) с двумя, что нас не устраивает.)

4. Точки P и Q взяты на основаниях AB=10 и CD=7 трапеции $ABCD$ соответственно таким образом, что $AP/PB = DQ/QC$. Прямые AQ и DP пересекаются в точке M, а прямые PC и QB — в точке N. Найдите длину отрезка MN. **(<u>70/17</u>. $AP/PB = DQ/QC \Leftrightarrow AP/DQ = PB/QC$. Пусть $AP/DQ= PB/QC=k$, тогда треугольники AMP и QDM, PBN и CQN подобны с этим коэффициентом k. Тогда треугольники QAB и QMN подобны с коэффициентом (k+1). Значит, $MN=AB/(k+1)$ и длина отрезка MN не зависит от выбора точек P и Q, но зависит от длин оснований AB и CD, т.к. согласно свойству ряда равных отношений $k=AP/DQ=PB/QC=(AP+PB)/(DQ+QC)=AB/DC$=10/7 и $MN=AB/(k+1)$=70/17.)**

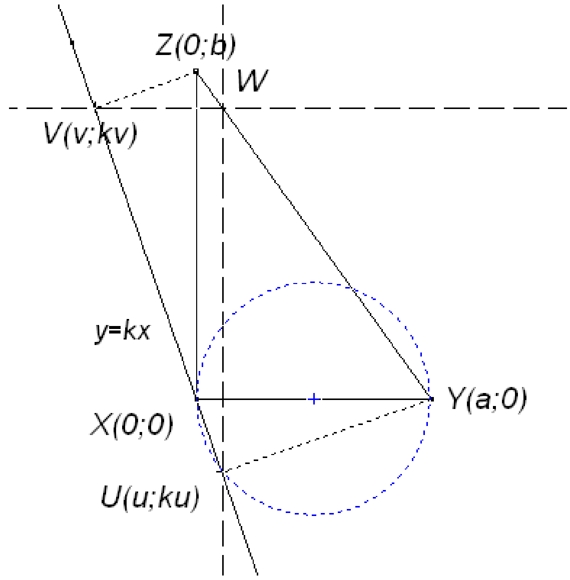


5. Во время лекции по безопасности информации в Цветочном городе Знайка предложил малышам отгадать загаданное им число из первой сотни. Для этого каждый малыш пишет на карточке не более 5 различных натуральных чисел из первой сотни и предъявляет её для всеобщего обозрения. Затем Знайка одновременно указывает все карточки, на которых написано загаданное им число. Какое наименьшее число малышей может договориться между собой, чтобы отгадать число? **(<u>33</u>. Пусть было предъявлено n карточек (от n малышей), которые содержат в сумме не более $5n$ чисел. При этом: 1) максимум одно из чисел можно не указывать (иначе не распознать число в случае отсутствия загаданного числа на карточках); 2) ещё n чисел могут быть указаны по разу (иначе по принципу Дирихле найдётся карточка с двумя числами, указанными по одному разу, и малыши не смогут узнать загаданное Знайкой число в случае его присутствия только на этой карточке); 3) остальные (99–n) чисел должны быть указаны хотя бы 2 раза. Значит, минимальное суммарно указанное количество чисел равно $n+(99-n)\cdot 2$ и не превосходит максимально возможного количества чисел $5n$. Из полученного неравенства $n+(99-n)\cdot 2\le 5n$ следует, что $6n\ge 198$ и $n\ge 33$. Приведём пример на 33 карточки (33 малыша). Не будем трогать число 100. Пронумеруем малышей числами от 1 до 33 и каждый малыш в зависимости от своего номера k напишет на своей карточке числа ($3k$–2, $3k$–1, $3k$, $3k$+1, $3k$+6) по модулю 99, т.е. у последних двух малышей будут карточки (94, 95, 96, 97, 3) и (97, 98, 99, 1, 6). Тогда при загаданном числе: 1) 100 – Знайка ни на одну карточку не укажет; 2) $3k$, где k – целое число в пределах от 1 до 33, – Знайка укажет на карточки номер k и k–2 (по модулю 33), т.е. на 1-ю и 32-ю карточки при загаданном числе 3 и на 2-ю и 33-ю карточки при загаданном числе 6; 3) $3k$–1, где k – целое число в пределах от 1 до 33, – Знайка укажет на карточку номер k, т.к. такое число указано только на одной карточке; 4) $3k$–2, где k – целое число в пределах от 1 до 33, – Знайка укажет на карточки номер k и k–1 (по модулю 33), т.е. на 1-ю и 33-ю карточки при загаданном числе 1. Таким образом, мы видим, что при любом из 100 загаданных чисел Знайка будет указывать (или промолчит в одном случае) на свой (неповторимый) набор карточек, благодаря чему малыши смогут узнать загаданное Знайкой число.** ***<u>Комментарий</u>: Это переделка задачи №19 с ЕГЭ-2018 со***

***скандальной формулировкой. См. также эту же задачу (№5 в младшей лиге), но с другой формулировкой.*)**

6. У Маши и Даши были два одинаковых прямоугольника. Каждая разрезала свой прямоугольник на два прямоугольника, при этом у Маши получились прямоугольники с периметрами 20 см и 30 см, а у Даши – прямоугольники с периметрами 25 см и 39 см. Чему равна меньшая сторона первоначального прямоугольника (в см)? **(6. Девочки разрезали изначальный прямоугольник размерами $a\times b$ и периметра $P=2(a+b)$ в разных направлениях, т.к суммарный периметр прямоугольников Маши равен 20+30=50=$P+2a$, а у Даши – 25+39=64=$P+2b$. Сложим эти 2 равенства и получим, что 114=$2P+2a+2b=3P$, т.е. $P=38$. Тогда $a=(50-P)/2=6$, $b=(64-P)/2=13$.)** **Условие задачи некорректно, т.к. Даша не могла так разрезать.**

7. Через вершину X прямого угла прямоугольного треугольника XYZ проводится переменная прямая d. Точки U и V — проекции на d точек Y и Z соответственно. Перпендикуляр к XY, проведенный через точку U, и перпендикуляр к XZ, проведённый через точку V, пересекаются в точке W. Найдите геометрическое место точек W. **(Вся сторона YZ. Рассмотрим систему координат, в которой у точек будут следующие координаты: $X(0;0)$, $Y(a;0)$, $Z(0;b)$, $U(u;ku)$, $V(v;kv)$, где $y=kx$ – уравнение произвольной невертикальной прямой, проходящей через X, тогда u и v не равны 0. Тогда скалярные произведение перпендикулярных векторов $XU\{u;ku\}$, $YU\{u-a;ku\}$ и $XV\{v;kv\}$, $ZV\{v;kv-b\}$равны 0, т.е. $u(u-a)+ku\cdot ku=0$ и $v\cdot v+kv\cdot(kv-b)=0$, откуда с учётом $u\neq 0$ и $v\neq 0$ получаем, что $u=a/(k^2+1)$, $v=bk/(k^2+1)$, что является абсциссой и ординатой точки W на отрезке YZ, уравнение которого в отрезках описывается как $1=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, т.к. точки $Y(a;0)$ и $Z(0;b)$ принадлежат этой прямой. Координаты точки W удовлетворяют этому равенству. При этом абсцисса u пробегает дважды все значения от 0 до a, т.к. точка $U(u;ku)$ лежит на окружности с диаметром XY, значит, все положения точки W на отрезке YZ достигаются. В частности, при вертикальной прямой $x=0$ нужная нам точка W совпадёт с точкой с Z.)**



8. Андрей закрашивает на белой доске $n\times n$ поочерёдно клетки, но красить он может только такие клетки, рядом (по стороне) с которыми в момент закрашивания есть хотя бы две незакрашенные клетки. Какое наибольшее количество клеток Андрей сможет покрасить по таким правилам? **($2n^2-2n=2n(n-1)$. Рассмотрим перегородки между клетками, всего их $2n^2-2n$. Пусть как только Андрей красит клетку, он удаляет перегородки-стороны этой клетки. Заметим, что когда Андрей красит клетку, он удаляет хотя бы две перегородки. Тогда всего в конце закрашенных**

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	56
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	55
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	54
43	44	45	46	47	48	49	
	50		51		52		53

клеток не больше n^2–n. Приведём пример для доски 8×8, для других размеров он аналогичен.)

9. Известно, что $[a]=n$, $[b]=n-1$, где n – натуральное число. Сколько различных значений может принимать $[ab]$? ($[x]$ – целая часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x) **(<u>$2n$</u>. $[a]=n \Leftrightarrow 0<n\le a<n+1$, $[b]=n-1 \Leftrightarrow 0\le n-1\le b<n$. Тогда $0\le n(n-1)\le a\cdot b<n(n+1)$, откуда $n^2-n\le[a\cdot b]\le n^2+n-1$. Тогда всего $(n^2+n-1-(n^2-n))+1=2n$ различных значений, каждое из которых достигается.)**

10. При каких N на шахматную доску можно поставить 4 ладьи и N слонов так, чтобы каждая ладья била ровно 3 слонов и была побита ровно 3 слонами, а каждый слон бил ровно 1 ладью и был побит ровно 1 ладьёй? *Приведите ответ и пример.* **(<u>12</u>, т.к. существует ровно $4\cdot3=12=N\cdot1$ ударов ладей по слонам. Пример см. на рисунке.)**

			С	С			
С			Л	Л			С
			С	С			
			С	С			
С			Л	Л			С
			С	С			

11. По кругу написано 20 различных натуральных чисел, причём 19 из них меньше полусуммы соседей. Какое наименьшее значение может принимать оставшееся число? **(<u>66</u>. Рассмотрим самое большое число (M). Оно будет обязательно больше полусуммы своих соседей (все числа различны), значит, остальные 19 строго меньше полусуммы своих соседей. Рассмотрим самое маленькое число (m). От m до M идут две цепочки чисел по возрастанию, иначе число, большее своих соседей, будет больше их полусуммы, а таких чисел у нас больше нет. Пронумеруем числа такой цепочки: $m=a_0 < a_1 < a_2 <\ldots< a_9 < a_n \le M$. Из неравенства $a_k<(a_{k+1}+a_{k-1})/2$ для каждого k в пределах от 1 до 9 получим, что $\Delta_{k+1} = a_{k+1} - a_k > a_k - a_{k-1} = \Delta_k$, т.е. дельты образуют возрастающую последовательность натуральных чисел. Тогда либо обе цепочки содержат ровно по 9 промежуточных чисел и в одной из них $\Delta_1\ge2$ (т.к. числа различны), либо одна из них содержит хотя бы 10 промежуточных чисел. В первом случае $M\ge m+\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_{10}\ge1+(2+3+\ldots+10+11)=66$, во втором случае $M\ge m+\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_{11}\ge1+(1+2+3+\ldots+10+11)=67$. Тогда наименьшее возможное значение M=66. Пример: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 46, 37, 29, 22, 16, 11, 7, 4, 2.)**

12. Найдите наибольшее натуральное N, при котором для любых двух различных нечётных натуральных чисел a и b выполняется неравенство $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2>\frac{N}{ab}$. **(<u>16</u>. С точностью до симметрии будет считать, что $a>b$. Неравенство $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2>\frac{16}{ab}$ преобразуем приведением к общему знаменателю, умножением на $(ab)^2$ и извлечением корня к равносильному неравенству $a^2-b^2>4\sqrt{ab}$, которое верно в силу применения неравенства Коши для двух различных положительных чисел $a+b>2\sqrt{ab}$ и очевидного неравенства $a-b\ge2$ для двух различных нечётных чисел (с условием $a>b$), которые мы перемножим (обе части обоих неравенств положительны). При $N\ge17$ требуемое неравенство не будет выполняться, например, для чисел 19 и 17, т.к.**

$\sqrt{Nab} \geq \sqrt{17 \cdot 17 \cdot 19} = 17\sqrt{19} > 72 = (19-17)\cdot(19+17) = 19^2 - 17^2$, **т.е не выполняется неравенство** $a^2 - b^2 > \sqrt{Nab}$, **которое равносильно исходному** $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 > \frac{N}{ab}$ **.)**

13. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = 5$, $xz+y = 7$. **({(–1; 1; –6), (–1; 6; –1), (5; 7; 0), (6; 1; 1)}. Умножим второе уравнение на** z **и сложим его с первым. Получим** $x(z^2+1)=5+7z$, **откуда** $x=(5+7z)/(z^2+1)$. **При** $|z|\geq 8$ **получим** $0<|x|<1$, **т.е.** x **не будет целым числом, значит, нам надо перебрать все целые числа от (–7) до 7. Сделаем это с помощью таблицы, в которой укажем в четвёртой строчке только случаи целых значений для** x**.)**

z	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$5+7z$	-44	-37	-30	-23	-16	-9	-2	5	12	19	26	33	40	47	54
z^2+1	50	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26	37	50
x		-1					-1	5	6						
y		1					6	7	1						

14. Найдите наибольшее количество сторон невыпуклого многоугольника, у которого ровно 6 внутренних углов больше 90°. **(<u>21</u>. Пусть всего** n **вершин, тогда сумма углов равна** $(n–2)\cdot 180°$, **что меньше** $6\cdot 360°+(n–6)\cdot 90°$, **т.к. ровно 6 углов будут больше 90°, но меньше 360°, а** $(n–6)$ **остальных углов не превосходят 90°. Из данного неравенства находим** $n<22$. **При этом можно построить невыпуклый 21-угольник, у которого ровно 6 углов больше 90°. Предлагаем доказать это самостоятельно, что само по себе является хорошей задачей.)**

15. На прямой стоит 20 точек. Рассмотрим все 190 отрезков с концами в этих точках. Оказалось, что все длины этих отрезков — натуральные числа. Какое наибольшее количество нечётных чисел может быть среди этих 190 длин? **(<u>100</u>. Введём систему координат на нашей прямой, где у самой левой точки будет координата 0, тогда у всех остальных точек координаты будут натуральными числами, т.к. длины всех отрезков – натуральные числа. Пусть** n **точек будут с нечётными координатами, значит,** $(20–n)$ **точек будут с чётными координатами, тогда будет ровно** $n(20–n)\leq 10^2$ **отрезков с нечётными длинами. Действительно, неравенство** $n(20–n)\leq 10^2$ **равносильно неравенству** $0\leq(n–10)^2$, **которое верно для любых** n**. Значит, наибольшее количество нечётных длин равно 100. В качестве примера подойдёт набор точек с целыми координатами от 0 до 19, когда ровно 10 точек имеют чётные и ровно 10 точек имеют нечётные координаты, следовательно, ровно** $10\cdot 10=100$ **нечётных отрезков с концами в парах точек разной чётности.)**

16. На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске? **(<u>8, 15 или 16</u>. В ряду (строке или столбце) может стоять либо 8 шашек (тогда в нём нет свободных клеток и такой ряд будем называть *полным*), либо**

не более 2 шашек (если пустая клетка есть). Нам не подойдёт доска, где все 64 клетки заполнены, т.к. свободных клеток вообще не будет, что противоречит условию. Если нет полных рядов, то в каждой горизонтали максимум по 2 шашке и шашек не более 16. Если есть хотя бы 2 полных параллельных ряда, тогда их ровно 2, больше шашек нет, иначе найдётся пустая клетка, которой соответствуют в кресте (вертикаль и горизонталь, на пересечении которых стоит эта клетка) уже не менее 3 клеток. Получаем вариант 16 шашек, например, когда заняты два нижних ряда. Если есть два перпендикулярных полных ряда, то аналогично остальные клетки свободны, и получаем вариант с 15 шашками, например, когда заняты полностью левый и нижний ряды. Рассмотрим случай ровно одного полного ряда (не умаляя общности, можно считать, что горизонтального), тогда в каждом столбце ещё максимум по 1 шашке, причём есть столбец (особый) ещё с шашкой не из полного ряда. Тогда 6 свободных клеток этого особого столбца лежат в 6 полностью пустых строках, для каждой клетки из которых есть ещё одна шашка, которая обязана находиться только во второй строке, где есть ещё одна шашка этого особого столбца. Тогда получим 2 параллельных полных ряда. Противоречие. Остался случай, когда полных рядов нет. Предположим, что есть пустой ряд, тогда в каждом перпендикулярном ряду есть ровно по 2 шашке и шашек будет ровно 16. Таким образом, остался случай, когда ни пустых, ни полных рядов нет. Значит, шашек не менее 8 и не более 16. Пример на 8 – 8 шашек на главной диагонали. Предположим, что есть пример с *N* шашками, где 9≤*N*≤15. Тогда по принципу Дирихле есть строка и столбец, в которых есть хотя бы по 2 шашке, но тогда их и ровно по 2. Эти строка и столбец на пересечении должны иметь шашку, иначе получим свободную клетку, у которой в «кресте» уже 4 шашки. Можно считать, что это столбец *x* и строка *k*, а занятыми будут клетки *xk, yk* и *xm* (см. рис.). Тогда для любой свободной клетки из столбца *x* и строки *k* получим, что все остальные клетки из их перпендикулярной строки и столбца соответственно будут свободными, клетка *ym* может быть свободной или занятой. Значит, на доске не более 4 шашек, которые могут стоять только в клетках на пересечении выделенных нами двух строк и двух столбцов. Противоречие. Из всего нашего перебора следует, что могло быть 8, 15 или 16 шашек.)