1. (ст) Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{x^2} - 1$.

2. (ст) Пусть $S(n)$ — это сумма цифр натурального числа n. Сколько решений имеет уравнение $n = m \cdot S(n)$, где m – цифра?

3. (ст) При каких k можно отметить крестиками k клеток ($0 \le k \le 64$) доски 8×8 так, чтобы при любом разрезании доски на прямоугольники 1×2 было чётное число доминошек с двумя отмеченными клетками?

4. (ст) Точки P и Q взяты на основаниях $AB=10$ и $CD=7$ трапеции $ABCD$ соответственно таким образом, что $AP/PB = DQ/QC$. Прямые AQ и DP пересекаются в точке M, а прямые PC и QB — в точке N. Найдите длину отрезка MN.

5. (ст) Во время лекции по безопасности информации в Цветочном городе Знайка предложил малышам отгадать загаданное им число из первой сотни. Для этого каждый малыш пишет на карточке не более 5 различных натуральных чисел из первой сотни и предъявляет её для всеобщего обозрения. Затем Знайка одновременно указывает все карточки, на которых написано загаданное им число. Какое наименьшее число малышей может договориться между собой, чтобы отгадать число?

6. (ст) У Маши и Даши были два одинаковых прямоугольника. Каждая разрезала свой прямоугольник на два прямоугольника, при этом у Маши получились прямоугольники с периметрами 20 см и 30 см, а у Даши – прямоугольники с периметрами 25 см и 39 см. Чему равна меньшая сторона первоначального прямоугольника (в см)?

7. (ст) Через вершину X прямого угла прямоугольного треугольника XYZ проводится переменная прямая d. Точки U и V — проекции на d точек Y и Z соответственно. Перпендикуляр к XY, проведенный через точку U, и перпендикуляр к XZ, проведённый через точку V, пересекаются в точке W. Найдите геометрическое место точек W.

8. (ст) Андрей закрашивает на белой доске $n\times n$ поочерёдно клетки, но красить он может только такие клетки, рядом (по стороне) с которыми в момент закрашивания есть хотя бы две незакрашенные клетки. Какое наибольшее количество клеток Андрей сможет покрасить по таким правилам?

9. (ст) Известно, что $[a]=n$, $[b]=n-1$, где n – натуральное число. Сколько различных значений может принимать $[ab]$? ($[x]$ – целая часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x)

10. (ст) При каких N на шахматную доску можно поставить 4 ладьи и N слонов так, чтобы каждая ладья била ровно 3 слонов и была побита ровно 3 слонами, а каждый слон бил ровно 1 ладью и был побит ровно 1 ладьёй? *Приведите ответ и пример.*

11. (ст) По кругу написано 20 различных натуральных чисел, причём 19 из них меньше полусуммы соседей. Какое наименьшее значение может принимать оставшееся число?

12. (ст) Найдите наибольшее натуральное N, при котором для любых двух различных нечётных натуральных чисел a и b выполняется неравенство $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2>\frac{N}{ab}$.

13. (ст) Решите в целых числах систему уравнений $x-yz=5$, $xz+y=7$.

14. (ст) Найдите наибольшее количество сторон невыпуклого многоугольника, у которого ровно 6 внутренних углов больше 90°.

15. (ст) На прямой стоит 20 точек. Рассмотрим все 190 отрезков с концами в этих точках. Оказалось, что все длины этих отрезков — натуральные числа. Какое наибольшее количество нечётных чисел может быть среди этих 190 длин?

16. (ст) На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске?