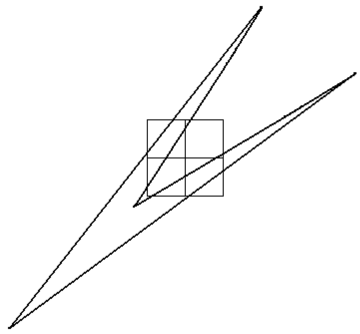
XVI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XIII Турнир математических игр.

Игра «Домино». ***Младшая лига (7-9 класс).*** **Решения. 09.09.2020.**

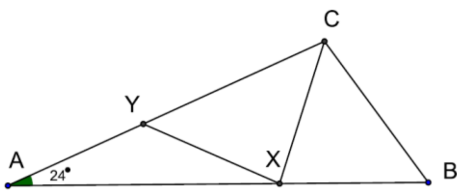
0–0. Нарисуйте замкнутую ломаную без самопересечений с наименьшим количеством звеньев, пересекающую каждый из 12 единичных отрезков клетчатого квадрата 2×2 и не проходящую через их концы. **(Каждое звено может пересечь не более двух из восьми граничных отрезков, значит, надо не менее 4 звеньев. Пример 4-звенной ломаной на рисунке.)**



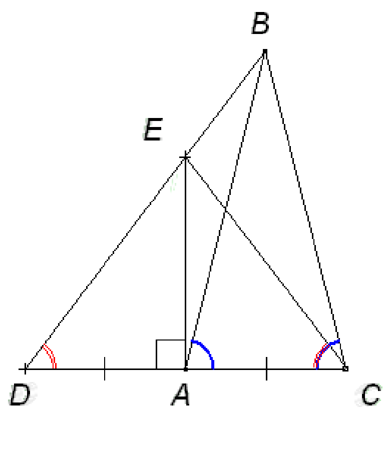
0–1. Какое наименьшее натуральное число не является делителем числа 50! ? (n! – произведение всех натуральных чисел от 1 до n.) **(<u>53</u>. Простое число 53 не входит в разложение на простые множители числа 50!, поэтому 50! не делится на 53. С другой стороны ясно, что 50! делится на все числа до 50, на 3·17=51 и на 2·26=52.)**

0–2. Приведите пример натуральных чисел a и b, в десятичной записи каждого из которых есть кусок подряд стоящих цифр 2020 и при этом отношение a:b=2020. **(например,** $2020=\frac{20200001\cdot 2020}{20200001}=\frac{40804002020}{20200001}$ **или** $2020=\frac{10002020\cdot 2020}{10002020}=\frac{20204080400}{10002020}$**, группу подряд стоящих нулей также можно увеличить, т.е. строится бесконечная серия таких чисел)**

0–3. В треугольнике ABC с углом BAC, равным 24°, на сторонах AB и AC взяты точки X и Y соответственно так, что $AY=XY=XB=XC$. Найдите $\angle ABC$. **(<u>54°</u>. ΔAYX является равнобедренным, и $\angle AXY = \angle XAY$ = 24°. Поскольку $\angle XYC$ – внешний для треугольника AXY , то $\angle XYC = \angle AXY + \angle XAY$ = 48°. Треугольники YXC и BXC являются равнобедренными. Значит, $\angle XCY = \angle XYC$ = 48°, $\angle XCB = \angle ABC$. Сумма углов в треугольнике ABC должна быть равна 180°, поэтому 180° = $\angle BAC + \angle XCY + \angle XCB + \angle ABC$ = 24° + 48° + 2$\angle ABC$. Отсюда получаем, что 2$\angle ABC$ = 180° − 24° − 48° = 108°, тем самым $\angle ABC$ = 54°.)**



0–4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На прямой AC выбрана такая точка D, что A — середина DC. Перпендикуляр к прямой DC в точке A пересекает отрезок BD в точке E. Найдите $\angle DBA$, если $\angle AEC$=40°, $\angle ABC$=30°. **(<u>25°</u>. Заметим, что треугольники ABC ($AB=BC$) и DEC ($DE=EC$) – равнобедренные. Тогда $\angle DBA=\angle BAC–\angle BDA$ (разность внешнего и внутреннего) = (180°–30°)/2–(90°–40°)=25°.)**



0–5. В парламенте присутствуют депутаты от партий "Единение" и "Справедливость". При голосовании ровно 55 процентов членов "Единения" и ровно 5 процентов членов "Справедливости" поддержали спикера, в результате он набрал ровно 50 процентов голосов. Какое наименьшее количество депутатов могло входить в парламент? **(<u>200</u>. Пусть было a и b депутатов от партий "Единение" и "Справедливость" соответственно. Тогда** $\frac{55}{100}a+\frac{5}{100}b=\frac{50}{100}(a+b)$**, откуда a=9b. Из условия 5**

процентов (1/20 часть) от *b*, следует, что *b* делится на 20. Значит, минимальное *b* равно 20, минимальное *a* равно 9·20=180. Тогда всего депутатов минимум 200 (180 и 20 от партий "Единение" и "Справедливость" соответственно). Причём могло быть так, что «55 процентов членов "Единения" и ровно 5 процентов членов "Справедливости" поддержали спикера, в результате он набрал ровно 50 процентов голосов», т.к. это 99 депутатов от «Единения» и 1 депутат от «Справедливости».)

0–6. Какое наибольшее количество непересекающихся доминошек 1×2 (касаться могут) можно разместить в квадрате 99×99 таким образом, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку, не пересекающуюся с уже размещёнными? **(<u>2450</u>. Рассмотрим в общем виде доску $(2n+1)\times(2n+1)$ для любого натурального n. Раскрасим её клетки в шахматном порядке, считая угловые клетки чёрными.**

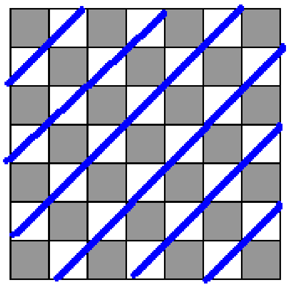


рис.1

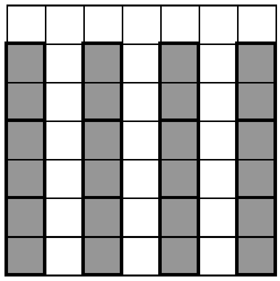


рис.2

Разобьём все белые клетки, которых $((2n+1)^2-1)/2=2n(n+1)$, на пары соседних клеток, например, начиная со второй диагонали (см. рис.1 для n=3). Это удастся сделать, т.к. все белые диагонали будут чётными по длине. Тогда в каждой такой паре закрыта доминошкой максимум одна клетка, иначе в квадрате 2×2, содержащем эти 2 белые клетки, уже нельзя будет поместить ещё одну доминошку, т.к. каждая доминошка должна содержать ровно одну белую клетку, но обе белые клетки этого квадрата будут закрыты. Значит, у нас могут быть закрыты максимум $2n(n+1)/2=n(n+1)$ белых клеток, соответствующие такому же количеству доминошек. В качестве примера подойдёт конструкция, как на рис.2, когда все нечётные по номеру столбцы закрыты доминошками, кроме верхних клеток. Тогда будет ровно $(n+1)$ столбец по n доминошек, т.е. $n(n+1)$ штук. В нашей задаче при n=49 получим 49·50=2450 доминошек.)

1–1. Найдите наименьшее целое число n, удовлетворяющее неравенству $n \geq \frac{2020}{n}$.

(<u>–44</u>. Т.к. это будет очевидно отрицательное число, то после умножения на n, получим неравенство $n^2 \leq 2020$. Тогда наименьшим целым отрицательным числом, удовлетворяющим неравенству, будет число (–44).)

1–2. Укажите наименьшее натуральное число, большее 1, которое при извлечении корней 2-й, 3-й, 4-й, …, 10-й степени всегда даёт целое число. **(<u>$2^{\text{НОК}(2,3,4,5,6,7,8,9,10)}=2^{2520}$</u>)**

1–3. Сколько существует трёхзначных чисел $\overline{abc}$, для которых выполняется равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$? **(6+3+1=<u>10</u>, т.к. равенство возможно только для наборов (2, 3, 6), (2, 4, 4) и (3, 3, 3), дающих соответственно 3!=6, 3 и 1 трёхзначных чисел.)**

1–4. Пончик, Незнайка и Сиропчик купили по арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Незнайка сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в 7 раз тяжелее, то суммарный вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». Чей из арбузов тяжелее и во сколько раз – Незнайки или Пончика? **(<u>У Пончика в 4 раза</u>. Пусть *p, n, s* – вес арбузов Пончика, Незнайки и Сиропчика соответственно. Тогда по утверждению**

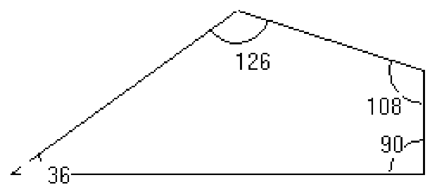
Незнайки: $7n+p+s=2(p+n+s) \Leftrightarrow 5n=p+s$. По аналогичному утверждению Сиропчика: $5s=p+n$. Вычитая из первого равенства второе, получим, что $5(n-s)=s-n$, откуда $n=s$. Значит, из первого уравнения имеем $4n=p$.)

1–5. Найдите наименьшее простое p, удовлетворяющее условию $p=a^2+b^2=c^2+2d^2=e^2+10f^2$, где a, b, c, d, e, f – натуральные числа. **(<u>41</u>. При $f=2$ и $e=1$ получим подходящее нам число $41=4^2+5^2=3^2+2\cdot4^2=1^2+10\cdot2^2$. Меньшие числа возможны только при $f=1$ и $a\in\{1, 3, 5\}$, т.к. p – нечётное, но ни один из вариантов не подходит.)**

1–6. Найдите сумму всех шестизначных чисел, в которых встречаются только единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. **(<u>3555552</u>. В каждом числе чередуются 2 и нечётная цифра (1 или 3). Разобьём все числа на пары, когда у одного стоит 1, то у другого 3, и наоборот, а 2 у них стоят в одних и тех же разрядах, например, 123232 и 321212. Тогда в каждой паре сумма равна 444444, всего чисел $2\cdot2^3$, т.к. два вида чередования чётности и по 2 варианта нечётной цифры (1 или 3), в каждом из 3 разрядов, предназначенных для них. Значит, вся сумма равна $444444\cdot2^4/2=2^5\cdot111111=32\cdot111111=3555552$.)**

2–2. Петя выписал по кругу в некотором порядке все целые числа от 1 до 8 и затем отметил те из них, которые равны сумме двух своих соседей. Какое наибольшее количество чисел могло быть отмечено? Приведите ответ и пример. **(<u>4</u>, например, 1, <u>4</u>, 3, <u>5</u>, 2, <u>8</u>, 6, <u>7</u>. Разобьём на 4 пары соседних чисел, в каждой из которых будет отмечено не более 1 числа (большее из двух). Значит, всего не более 4 отмеченных чисел.)**

2–3. Найдите наибольший угол выпуклого четырёхугольника (в градусах), если известно, что величины внешних углов четырёхугольника относятся как 3:4:5:8. **(<u>126°</u>. Пусть углы четырёхугольника равны α_1, α_2, α_3 и α_4, тогда выполняется соотношение $(180-\alpha_1):(180-\alpha_2):(180-\alpha_3):(180-\alpha_4)=3:4:5:8$. По свойству ряда равных отношений получим, что**



$$\frac{180-\alpha_1}{3}=\frac{180-\alpha_2}{4}=\frac{180-\alpha_3}{5}=\frac{180-\alpha_4}{8}=\frac{(180-\alpha_1)+(180-\alpha_2)+(180-\alpha_3)+(180-\alpha_4)}{3+4+5+8}=,$$

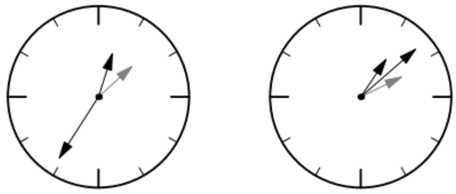
$$=\frac{720-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}{20}=\frac{360}{20}=18,$$ **откуда наибольший угол $\alpha_1=180-3\cdot18=126$. И такой выпуклый четырёхугольник с углами 126°, 108°, 90° и 36° существует, т.к. тогда внешние углы 54, 72, 90 и 144 относятся как 3:4:5:8.)**

2–4. Квадратный трехчлен x^2+bx-4 имеет два различных целочисленных корня. Чему может равняться b? **(<u>±3 и 0</u>. Согласно теореме Виета для приведённого квадратного трехчлена произведение целочисленных корней равно $(-4)=1\cdot(-4)=(-1)\cdot4=(-2)\cdot2$, b равно минус сумме корней, т.е. либо $-(1+(-4))=3$, либо $-((-1)+4)=-3$, либо $-(2+(-2))=0$.)**

2–5. У прямоугольника уменьшили стороны: длину – на 10%, ширину – на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12%. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%? **(<u>На 18%</u>. Обозначим через a и b длину и ширину прямоугольника. После уменьшения длины на 10%, а ширины на 20% получим прямоугольник со сторонами $0{,}9a$ и $0{,}8b$, периметр которого составляет 0,88 периметра исходного прямоугольника. Следовательно, $2(0{,}9a + 0{,}8b) = 0{,}88\cdot2(a + b)$, откуда $a = 4b$. Если теперь длину уменьшить на 20%, а ширину на 10%, то**

получим прямоугольник с периметром $2(0{,}8\cdot 4b + 0{,}9b) = 8{,}2b$, что составляет $8{,}2b : 10b = 0{,}82$ или 82% от периметра исходного прямоугольника. Следовательно, периметр уменьшится во второй раз на 18%.)

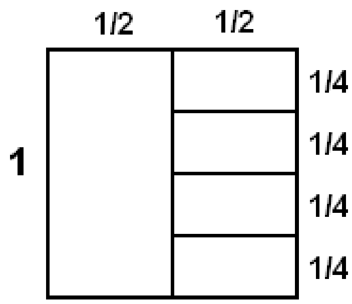
2–6. В некоторый момент времени Аня измерила угол между часовой и минутной стрелками своих часов. Ровно через один час она снова измерила угол между стрелками. Угол оказался таким же. Каким мог быть этот угол? **(<u>15° или 165°</u>. Через 1 час минутная стрелка остаётся на своем месте. При этом часовая стрелка повернулась на 30°. Раз угол не изменился, то минутная стрелка делит пополам один из углов между положениями часовой стрелки (либо тот, который 30°, либо дополнительный угол в 330° – см. рис.). Значит, либо часовая стрелка была на 15° раньше, либо на 165° позже.)**



3–3. Каждый из 20 одноклассников участвовал в трёх разных олимпиадах. Оказалось, что любые четверо из них участвовали в одной и той же олимпиаде. В каком наибольшем количестве различных олимпиад могли участвовать ученики этого класса? **(<u>41 олимпиада</u>. Выделим одного школьника (*A*), он участвовал в некоторых трёх олимпиадах. Заметим теперь, что у каждого из остальных 19 школьников хотя бы одна из олимпиад повторялась с этими тремя, т.к. он вместе с *A* входит в четвёрку школьников с общей олимпиадой. Значит, у каждого из 19 остальных школьников есть ещё максимум 2 новых олимпиады, тогда всего различных олимпиад не более 3+2·19=41. Из данной оценки очевидным образом следует и <u>пример</u> – все школьники участвовали в одной и той же олимпиаде и у каждого из 20 были ещё 2 свои неповторимые с другими школьниками олимпиады.)**

3–4. Длина круга стадиона равна 400м. Три бегуна одновременно стартовали в часовом забеге с одной стартовой линии, каждый – со своей постоянной скоростью. Первый бегун пробежал 20 км, второй – 19 км, третий – 18,1 км. Сколько раз во время этого забега один из бегунов обгонял другого? **(<u>8=2+4+2 раз</u>. Первый пробежал за час 50 кругов, второй – 47,5 кругов, третий – 45,25 круга. Тогда первый обогнал второго 2 раза, третьего – 4 раза, а второй обогнал третьего 2 раза.)**

3–5. Разрежьте квадрат со стороной 1 на пять прямоугольников, сумма периметров которых равна 9. **(см. рисунок, где 1 прямоугольник со сторонами 1 и 1/2, а 4 прямоугольника со сторонами 1/2 и 1/4, а суммарный периметр равен 3+4·1,5=9, что нам и требуется.)**



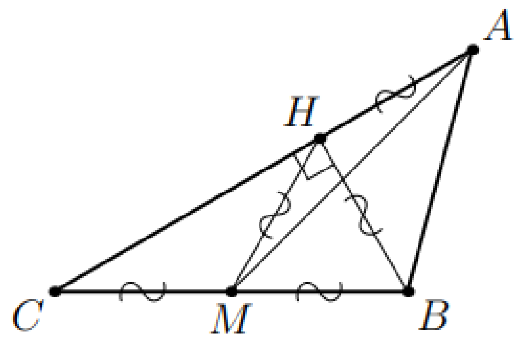
3–6. Натуральные числа a и b удовлетворяют неравенству $ab > 2020a+2021b$. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из них? **(<u>4042.</u> <u>*Пример*</u>: Пусть оба числа равны 4042, тогда $4042^2>2020\cdot 4042+2021\cdot 4042=(2020+2021)\cdot 4042=4041\cdot 4042$ – верное неравенство. <u>*Доказательство оценки 1:*</u> Предположим, что оба числа не превосходят 4041. Исходное неравенство разделим на положительное число ab и получим $1>\frac{2020}{b}+\frac{2021}{a}\geq\frac{2020}{4041}+\frac{2021}{4041}=1$ – противоречие. Значит, наше предположение неверно и хотя бы одно из чисел a и b больше 4041. <u>*Комментарий*</u>*: Всё элегантно и коротко! Настоящая олимпиадная задача!* <u>*Доказательство оценки 2:*</u> Предположим, что оба натуральных числа не превосходят 4041. Исходное не-**

равенство равносильно неравенству $ab-2020a-2021b+2020\cdot2021>2020\cdot2021$, т.е. $(a-2021)(b-2020)>2020\cdot2021$, при этом для натуральных a и b в пределах от 1 до 4041 будут выполняться неравенства $-2020\le a-2021\le2020$, $-2019\le b-2020\le2021$, значит, $-2020\cdot2021\le(a-2021)(b-2020)\le2020\cdot2021$, что противоречит верному неравенству $(a-2021)(b-2020)>2020\cdot2021$. Значит, наше предположение неверно и хотя бы одно из чисел a и b больше 4041. *<u>Комментарий</u>: Типичное разложение на множители в суммах, где в качестве слагаемых присутствуют произведение двух переменных и сами переменные с некоторыми коэффициентами.*)

4–4. Найдите количество точек пересечения 9 прямых, если среди них есть ровно три параллельные и ровно четыре из этих прямых пересекаются в одной точке. **(<u>28</u>. Всего пар прямых $C_9^2=\frac{9\cdot8}{2}=36$ - это максимально возможное количество точек пересечения. По условию ровно три прямые параллельны, значит, 3 точки пересечения этих прямых не считаем. Кроме того, точка пересечения четырёх прямых посчитана $C_4^2=\frac{4\cdot3}{2}=6$ раз, значит, 5 повторов удаляем. Всего 36–3–5=28 точек пересечения.)**

4–5. В волейбольном однокруговом турнире играют 15 команд (каждая команда с каждой играет ровно один раз, ничьих нет). Команда считается *выступившей хорошо*, если она проиграла не более двух матчей. Найдите наибольшее возможное число команд, выступивших хорошо. **(<u>5</u>. Если команд, сыгравших хорошо, не менее 6, то рассмотрим шесть из них. Они могли проиграть не более 6×2=12 матчей. Но игр между собой они совершили 6×5/2=15. И, значит, суммарно проиграли не менее 15 матчей. Противоречие. Пример. Поставим капитанов 5 команд по кругу лицом к центру. Пусть каждая команда проиграла двум командам, капитаны которых справа от их капитана по кругу, а у двух команд, капитаны которых слева, – выиграла, и ещё выиграла у остальных 10 команд. Игры 10 команд между собой могут закончиться как угодно. Пять команд, капитаны которых стоят в круге, выступили хорошо. Остальные проиграли не менее пяти матчей.)**

4–6. Какие значения может принимать буква M при равенстве двух произведений с ненулевыми цифрами: $Л\cdot Е\cdot М\cdot М\cdot А=Т\cdot Е\cdot О\cdot Р\cdot Е\cdot М\cdot А$? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*) **(<u>4, 8 и 9</u>. После сокращения равных множителей получим равенство $Л\cdot М=Т\cdot Е\cdot О\cdot Р$, где не могут быть использованы цифры 0, 5 и 7 в силу условия и отсутствия делимости одного из произведений на 5 и 7. Тогда $Л\cdot М=\sqrt{Л\cdot М\cdot Т\cdot Е\cdot О\cdot Р}=\sqrt{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9}{n}}=\sqrt{\frac{2^7\cdot3^4}{n}}$, где n – ещё одна неиспользованная цифра, которая может принимать только значения 2 и 8, чтобы корень извлёкся. Получаем, что $Л\cdot М$ равно $2^3\cdot3^2=8\cdot9$ или $2^2\cdot3^2=4\cdot9$, причём в каждом из случаев набор остальных цифр можно подобрать.)**



5–5. В треугольнике ABC провели медиану AM. Найдите угол AMC, если углы BAC и BCA равны 45° и 30° соответственно. **(<u>135°</u>. Пусть BH — высота треугольника ABC. По условию угол BAC равен 45° , поэтому $BH = AH$. В треугольнике CBH катет BH лежит против**

угла 30°, поэтому *BC* = 2*BH*. Медиана *HM* прямоугольного треугольника *BHC* равна половине гипотенузы *BC*. Собирая все равенства отрезков воедино, получаем *AH*=*BH*=*HM*=*MB*=*MC* (см. рис.). Значит, треугольник *MBH* равносторонний, и угол *CMH* равен 120°. Кроме того, треугольник *AHM* равнобедренный, его угол *AHM* равен 90°+60°=150°, поэтому угол *AMH* равен 15°. Таким образом, ∠*AMC*=∠*AMH*+∠*HMC*=120°+15°=135°.)

5–6. Шахматная фигура «недоферзь» бьёт почти как обычный ферзь, но не может бить на 7 клеток по вертикали, горизонтали и диагонали (обычный — может). Какое наибольшее количество недоферзей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга? Приведите ответ и пример. (**<u>10, пример см. на рис.2 методом «пропеллера»</u>. Разобьём доску на 10 частей – 4 прямоугольника 1×7 и 6 прямоугольников 1×6 (см. рис.1). В каждой такой части стоит максимум 1 недоферзь, значит, будет не более 10 недоферзей, не бьющих друг друга.)**

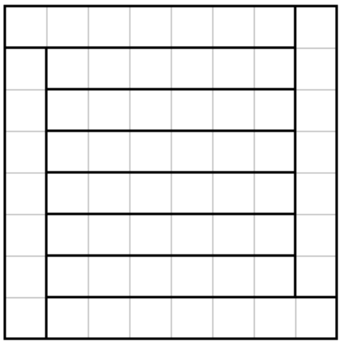


рис.1

ф							ф
		ф					
				ф			
						ф	
	ф						
			ф				
					ф		
ф							ф

рис.2

6–6. Пусть *S*(*x*) – сумма цифр натурального числа *x*. Известно, что S(*n*)+S(*n*+1)=100, S(*n*+1)+S(*n*+2)=75. При каком наименьшем *n* такое могло быть? **(<u>19998999</u>. Если *n*+1 не делится на 10, то S(*n*+1)=S(*n*)+1 и S(*n*)+S(*n*+1) должно быть нечётным числом, т.е. не равно 100. Значит, *n* оканчивается на девятки, тогда S(*n*+1)=S(*n*+2)–1=(75–1):2=37, S(*n*)=100–S(*n*+1)=100–37=63. *S*(*n*)–*S*(*n*+1) = 63–37 = 26=9*k*–1, где *k*=3 – количество девяток на конце числа *n*. Перед тремя девятками в числе *n* стоят цифры с суммой 63–3·9=36, последняя из которых не равна 9, значит, этих цифр не меньше 5 (иначе это ровно 4 девятки). Тогда наименьшее *n*=19998999, которое удовлетворяет условию: S(*n*)=7·9=63, S(*n*+1)=37, S(*n*+2)=38, S(*n*)+S(*n*+1) = 63+37 = 100, S(*n*+1)+S(*n*+2)=37+38=75.)**