XVI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIII Турнир математических игр.
Игра «Домино». ***<u>Старшая лига (9-11 класс).</u>*** **<u>Решения</u>. 09.09.2020.**

0–0. Какое наибольшее количество шашек можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакая шашка никакую другую не била (по диагонали на 1 клетку) и чтобы после этого можно было поставить ещё 8 ладей так, чтобы никакая ладья никакую шашку не била? *Приведите ответ и пример*. **(<u>24 шашки, см. пример на рисунке</u>. Заметим, что есть чисто ладейные ряды, которых должно быть не менее 3 в одном направлении (с точностью до симметрии, считаем, что ладейных горизонталей не меньше, чем ладейных вертикалей), т.к. иначе ладей будет не более 2·2=4. Если ладейных горизонталей не менее 5, то шашек не более 3·7=21. Если ладейных горизонталей ровно 4, то есть хотя бы 2 ладейных вертикали, тогда шашек не более 4·6=24. Если ладейных горизонталей ровно 3, то есть ровно 3 ладейных вертикали, тогда шашек не более 5·5=25. Если шашек ровно 25 на пересечении 5 шашечных горизонталей и 5 шашечных вертикалей, то по принципу Дирихле (разбиваем 8 рядов каждого направления на 4 пары соседних рядов) есть две соседних шашечных горизонтали и две соседних шашечных вертикали, на пересечении которых стоят 4 шашки в виде квадрата 2×2, т.е. найдутся шашки, бьющие друг друга, – противоречие. Значит, шашек не более 24.)**

л	л						
		ш	ш	ш	ш	ш	ш
л	л						
		ш	ш	ш	ш	ш	ш
л	л						
		ш	ш	ш	ш	ш	ш
л	л						
		ш	ш	ш	ш	ш	ш

0–1. Сумма каких-то двух различных делителей натурального числа n равна 1000. Какое наименьшее число различных простых делителей может иметь число n? *Приведите ответ и пример.* **(<u>2, например, 2 и 5, если $n=2^5\cdot5^2=800$, а 1000=200+800 – сумма двух различных делителей числа 800</u>. Докажем, что одного простого множителя быть не могло. Предположим, что это так, тогда 1000 либо равно $1+p^n$, либо p^m+p^k (где $m\le k$ – натуральные числа, p – простое число). В первом случае $p^n=999$, что невозможно, т.к. 999 делится и на 3, и на 37. Во втором случае $1000=2^3\cdot5^3=p^m+p^k=p^m(1+p^{k-m})$, тогда или $p^m=500$ при $m=k$, что невозможно, или это два взаимно простых множителя при $m<k$. Тогда либо $p^m=2^3$, $1+p^{k-m}=125$ (что невозможно при $p=2$), либо $p^m=5^3$, $1+p^{k-m}=8$ (что невозможно при $p=5$).)**

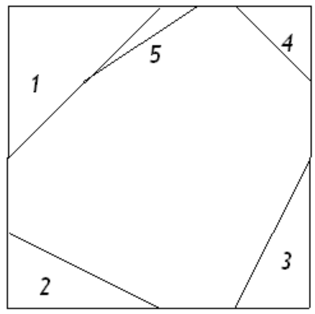
0–2. Дано натуральное число n. На доске выписаны в порядке возрастания все остатки, которые могут давать степени 2 при делении на n – 1, 2, 4, 8, 16 . Найдите n. **(<u>31, 30, 28, 24</u>, т.к. $n<32$ и после остатка 16 будет получаться один из вариантов 1, 2, 4, 8, т.е. наше число меньше 32 именно на этот остаток.)**

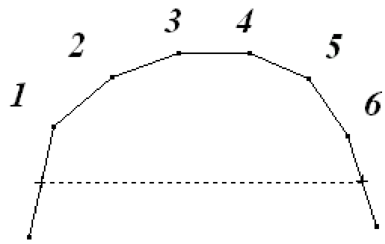
0–3. Найдите радиус окружности, задаваемой уравнением $x^2+y^2+2x-6y+8=0$. **(<u>$\sqrt{2}$</u>. $x^2+y^2+2x-6y+8=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=2$, значит, радиус равен $\sqrt{2}$.)**

0–4. В классе N мальчиков и N девочек ($N\ge2$). Каждый день дежурит группа из двух мальчиков и двух девочек. При каких N могло оказаться так, что к некоторому моменту каждый мальчик отдежурил с каждой девочкой ровно по четыре раза? **(<u>При всех натуральных $N\ge2$</u>. Пронумеруем мальчиков номерами от 1 до N и девочек – номерами от 1 до N. Создадим N пар мальчиков с соседними номерами по кругу (1, 2), (2, 3), …, (10, N), (N, 1), аналогично создадим N пар девочек. Пусть теперь каждая пара мальчиков ровно по одному разу отдежурит с каждой парой девочек. Тогда каждый мальчик входил в две пары, отдежуривших по ра-**

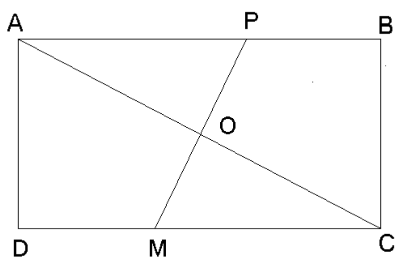
зу с двумя парами, в которые входит каждая из девочек, значит, каждый мальчик ровно 4 раза отдежурил с каждой девочкой, что нам и требуется.)

0–5. От плоского квадратного торта отрезали по куску прямыми разрезами, пока не разрезали торт на 50 частей, среди которых ровно 5 пятиугольников. Какое наибольшее количество восьмиугольников могло оказаться? **(<u>8</u>. Каждый разрез увеличивает суммарное количество вершин всех многоугольников максимум на 4 (если отрезок соединяет внутренние точки двух сторон), значит, за 49 операций, получив 50 частей, мы получим в сумме максимум 4+49·4=200 вершин. Тогда 200≥5·5+8·*n*+3·(50–5–*n*), откуда количество восьмиугольников *n*≤8. Отсюда получаем также, что нам надо иметь 37 треугольников и каждый раз проводить отрезок, увеличивающий суммарное число вершин на 4. Приведём алгоритм. Отрежем сначала 37 треугольников, каждый раз проводя отрезок между серединами соседних сторон увеличивающегося на каждом шаге по количеству сторон на 1 выпуклого многоугольника, пока не получим 4+37=41 угольник (см. на рисунке пример для первых 5 операций). После этого за 8 шагов отрежем 8 восьмиугольников, проводя отрезок между серединами двух сторон так, что между ними будут ровно 6 вершин имеющегося на данный момент выпуклого многоугольника (см. рис.). На каждом шагу наш многоугольник будет терять по 6–2=4 вершины и после 8 операций получим выпуклый многоугольник с 41–8·4=9 вершинами. Затем будем отрезать пятиугольники, проводя отрезок между серединами двух сторон так, что между ними будет ровно 3 вершины имеющегося на данный момент выпуклого многоугольника. На каждом шагу наш многоугольник будет терять по 3–2=1 вершине и после 4 операций получим выпуклый многоугольник с 9–4=5 вершинами, который и будет нашим пятым пятиугольником.)**





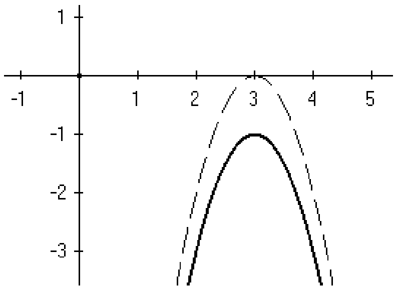
0–6. Две противоположные вершины прямоугольника со сторонами 1 и 2 совместили. Найдите длину линии сгиба. **(<u>$\sqrt{5}/2$</u>. Пусть у прямоугольника *ABCD* (*AB*=2, *BC*=1) совместили вершины *A* и *C*. Обозначим линию сгиба *PM* (*P* лежит на *AB*, *M* лежит на *BD*) , *O* – её середина. Тогда в силу симметрии *PC*=*PA*=*CM*=*AM*, т.е. отрезок *AC* перпендикулярен *PM* и делит его пополам в точке *O*. Δ*AOP* подобен Δ*ABC*, откуда *PO*/*BC*=*AO*/*AB* и *PM*=2·*PO*=2·*AO*·*BC*/*AB*=*AC*·*BC*/*AB*** $=\sqrt{1^2+2^2}/2=\sqrt{5}/2$ **.)**



1–1. На столе в ряд лежат 100 монет, две — решкой вверх (на 50-м и 100-м местах слева), остальные — орлом. За один ход Петя выбирает две рядом лежащие монеты, левая из которых лежит орлом вверх, а правая — решкой (если такие есть), обе переворачивает и кладёт между ними ещё одну монету орлом вверх. Какое наибольшее число ходов сделает Петя? **(<u>196 ходов</u>. Заметим, что монета-решка как бы каждый раз движется налево, сдвигаясь на одну монету, и создаёт ещё**

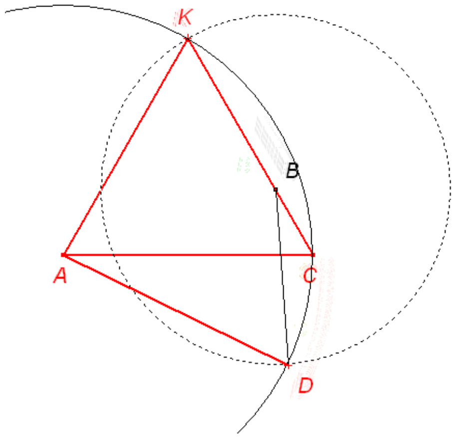
одну монету-орла после себя справа. Заметим, что левая монета-решка может сделать только конечное число ходов, создав после себя такое же количество монет-орлов. В результате и правая монета может двигаться налево тоже конечное число раз (конечное число орлов было левее и конечное число орлов добавилось после операций с левой решкой. Следовательно, Петя сделает 49+(98+49)=196 ходов (49 ходов левой решкой и 98+49 ходов правой решкой, т.к. ею надо обогнать 98 орлов, уже имеющихся, и 49 орлов, которые появятся после ходов левой решки).)

1–2. Укажите все квадратные трехчлены, не имеющие корней, у которых при увеличении свободного члена на 1 окажется ровно один корень. **(Все такие квадратные трехчлены $f(x)$ после выделения полного квадрата описываются очевидной формулой <u>$f(x)=a(x-b)^2-1$ при отрицательном a</u>, т.к. график соответствующей параболы будет с ветвями вниз и при увеличении на 1 будет касаться оси абсцисс (см., например, рис. для трехчлена $f(x)=-2(x-3)^2-1$).)**



1–3. Найдите все целые числа n, для которых число $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ является целым. **(<u>0 и 144</u>. Если указанное число A – целое, то и $A^2 = 25 + 2\sqrt{n}$ – целое число. Так как $2\sqrt{n} \le 25$, то $A^2 \le 50$. Кроме того, число A^2 нечётно. Поэтому A равно 5 и 7. Соответственно, $\sqrt{n}$ равен 0 и 12.)**

1–4. Точки A, B, C, D расположены на плоскости так, что $BC+BD=AC=AD$ и $\angle ACB=60°$. Чему может быть равен $\angle ADB$? **(<u>60°</u>. Воспользуемся методом «идеального» построения – см. рис. Для этого возьмём равносторонний треугольник *АСК*, где точка *B* лежит на стороне *СК*. Тогда либо *D* совпадает с *К*, либо *ADBK* – дельтоид (*AD=AK*, *BD=AC–BC=CK–BC=BK*). Значит, $\angle ADB=\angle AKB=60°$.)**

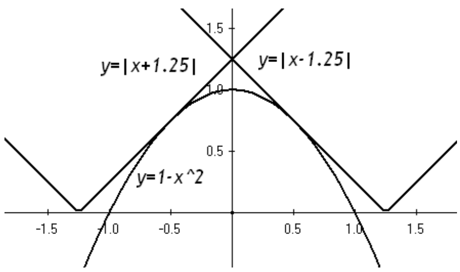


1–5. У торговца есть весы с двумя чашами, гиря весом 1 кг, а также достаточный запас сахара, соли и невесомых пакетов. За какое наименьшее число взвешиваний он сможет отвесить покупателю 230 кг сахара и 17 кг соли? Весы достаточно велики, чтобы можно было отвесить любое необходимое для решения количество сахара или соли. **(<u>8 взвешиваний</u>. Заметим, что за первую операцию мы сможем только отвесить 1 кг какого-то товара. На каждом следующем шаге мы сможем максимум отвесить ещё удвоенный вес, т.к. 1+1=2, 1+2+1=4, 1+2+4+1=8 и т.д., так как на одну чашу можно положить максимум все имеющиеся пакеты, не превосходящие последовательных степеней двойки, и гирю в 1 кг, что даст возможность создать на другой чаше пакет с максимум удвоенным весом. Значит, после 7 взвешиваний мы в сумме можем создать не более $1+2+4+\ldots+2^6 = 2^7-1 = 127$ кг товара, а нам надо 230+17=247. Приведём пример 8 взвешиваний, когда на одну чашу всегда кладём все имеющиеся пакеты с известным весом и гирю, в результате создавая новый удвоенный вес. Сначала отвешиваем 1 кг соли, затем 2 кг сахара, затем 4 кг сахара, 8 кг сахара, 16 кг соли, 32 кг сахара, 64 кг сахара и 128 кг сахара (ровно 8 взвешиваний). В результате**

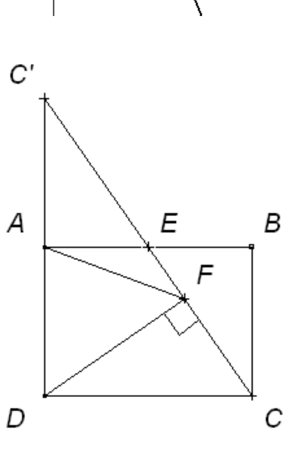
покупателю отдаём 1+16=17 кг соли и 2+4+32+64+128=230 кг сахара, что торговцу и надо.)

1–6. Цифры 1, 2, ..., 8 расставляют в клетках полоски 1×8. Разрезание полоски на две части так, чтобы сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой, назовём *красивым*. Какое наибольшее количество красивых разрезаний полоски может быть? *Приведите ответ и пример.* **(6, например, при порядке 1, 2, 3, 6, 5, 7, 8, 4, тогда получим 6 красивых пар (1, 35), (3, 33), (6, 30), (12, 24), (24, 12) и (32, 4), при одной некрасивой (17, 19). Предположим, что можно расставить числа так, что все 7 пар будут красивыми. Сумма всех чисел равна 36. Минимальная сумма из пары получающихся при разрезании (*m*) должна являться делителем числа 36, так как вторая сумма (бóльшая) 36–*m* делится на *m*. Делители 36 – это числа 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Будем идти слева направо до тех пор, пока сумма слева будет меньше и не станет равна 12. Это произойдёт, иначе для “перескакивания” 12 надо прибавить минимум 18–9= 9, что невозможно. После должна стоять шестёрка, так как до следующего делителя 18 нужна 6 (варианты 7 и 8 не подходят, так как 36 – 12 – 7 и 36 – 12 – 8 не являются делителями 36). Пройдя аналогично справа налево, получим, что слева от шестёрки и справа от шестёрки сумма чисел – 12 (в силу того, что шестёрка единственная). В результате сумма всех чисел должна быть равна 12+6+12=30. Противоречие, так как сумма чисел 36 больше 30. Значит, требуемая расстановка для 7 красивых пар не существует.)**

2–2. Вася выложил на столе по кругу рублёвые и двухрублёвые монеты (всего 50 монет) так, что у рублёвок одна соседка лежит орлом, другая — решкой; у двухрублёвок обе соседки лежат одинаково – обе орлом или обе решкой. Какая наименьшая сумма денег могла быть у Васи? **(52 рубля. Рассмотрим группы подряд идущих монет, лежащих одинаково – орлы и решки. Если группа состоит из одной монеты, то это двухрублёвка, т.к. у неё обе соседки лежат одинаково. Если же группа состоит хотя бы из двух монет, то внутренние монеты группы будут двухрублёвками (обе соседних монеты лежат одинаково), а крайними монетами группы будут рублёвки (соседние монеты лежат по разному). Значит, рублёвок будет чётное число и максимально возможно (для минимума суммы), когда будет максимально возможное количество групп минимальной длины (по 2), Т.е. мы можем иметь максимум 25 групп, но их должно быть чётное количество в силу чередования (орлы, решки), значит, максимум 24 группы (23 – по 2 монеты и 1 – 4 монеты), что даст нам 48 рублёвок и 2 двухрублёвки – в сумме 52 рубля.)**



2–3. При каком значении параметра *a* уравнение $|x–a|=1–x^2$ имеет единственное решение? **(*a*=±1,25=±5/4, см.рис. Надеемся, что школьных знаний хватает для решения этой задачи.)**

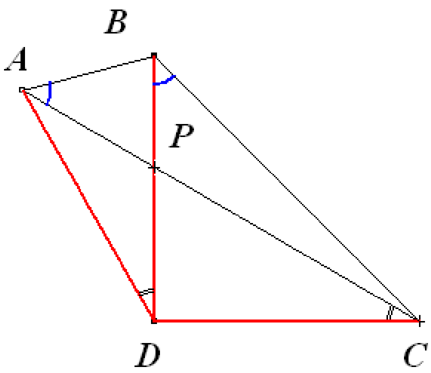


2–4. В прямоугольнике *ABCD* точка *E* – середина стороны *AB*, а *F* – такая точка на отрезке *CE*, что ∠*CFD*=90°. Найдите ∠*FAE*, если известно, что ∠*CEB*=α. **(2α–90°. Рассмотрим точку *C’*, симметричную *C* относительно *E*, тогда прямоугольные треугольники *AC’E* и *BCE* симметричны, значит, равны. Тогда медиана *AF* из прямого угла *F* в треугольнике *C’FD* равна половине**

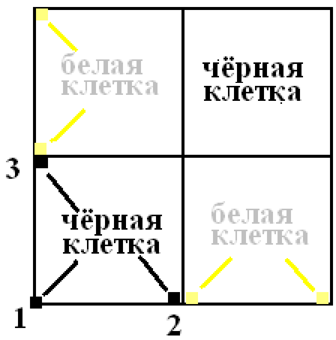
гипотенузы, т.е. *AF*=*AD*, значит, треугольник *FAD* — равнобедренный с ∠*DAF*=180°–2∠*ADF*=180°–2α (*AEFD* – вписанный), тогда ∠*FAE*=90°–∠*DAF*=90°–(180°–2α)=2α–90°.)

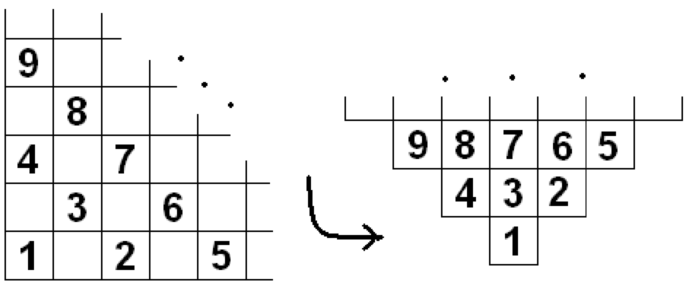
2–5. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 2 чёрных и 2 белых ладьи так, чтобы ладьи одного цвета друг друга били, а ладьи разных цветов друг друга не били? *Ответ дать числом в десятичной записи*. **(<u>103488</u>. Надеемся:☺, что приведённый нами ответ понятен:** $2\cdot(8\cdot C_8^2\cdot 7\cdot C_6^2+8\cdot C_8^2\cdot 6\cdot C_7^2)=2\cdot 8\cdot C_8^2\cdot\frac{7\cdot 6}{2}\cdot(5+6)=2\cdot 8\cdot 4\cdot 7\cdot 7\cdot 3\cdot 11=103488$ **.)**

2–6. Про выпуклый четырёхугольник *ABCD* известно, что *AD* = *BD* = *CD*, ∠*CBD* = ∠*BAC* и ∠*ADB* = ∠*ACD*. Найдите наименьший угол этого четырёхугольника (укажите угол вместе с его величиной). **(<u>∠*C*=45°</u>. Пусть ∠*ADB* = ∠*ACD*=α, ∠*CBD* = ∠*BAC*=β. Треугольник *ADC* – равнобедренный (*AD*=*DC*), значит, ∠*CAD*=∠*ACD*=α=∠*ADB*. Треугольник *ADB* – равнобедренный (*AD*=*DB*), значит, ∠*ABD*==∠*DAB*=∠*DAC*+∠*BAC*=α+β, а сумма углов этого треугольника равна α+2(α+β)=3α+2β=180° (1). Треугольник *CDB* – равнобедренный (*CD*=*DB*), значит, ∠*DCB*=∠*CBD*=β. Пусть *P* – точка пересечения диагоналей, тогда ∠*DPC* – внешний для треугольников *ADP* и *BCP*, т.е. он равен ∠*PAD*+∠*PDA*=2α=∠*PBC*+∠*PCB*=β+(β–α), откуда находим 3α=2β. Подставим это условие в (1) и получим, что 6α=180°, α=30°, β=45°. Теперь найдём углы четырёхугольника.)**



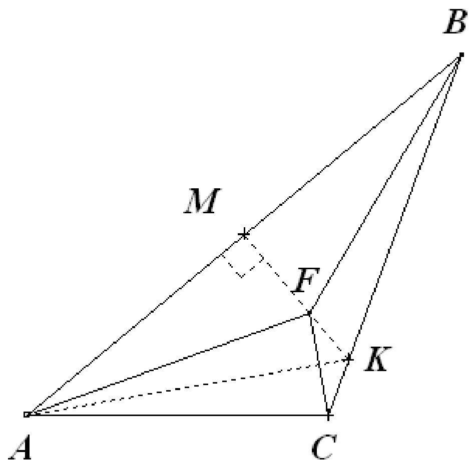
3–3. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на доску 100×2020, чтобы каждый слон бил не более, чем двух других? (Слоны не бьют друг сквозь друга.) **(2·(2020+98)=<u>4236 слонов</u>. Рассмотрим граничные узлы нашей доски – 4 угловых и по 2·(2019+99)=4236 граничных неугловых узла каждого цвета (белых и чёрных), всего 4+2·4236=8476 узлов. Каждый слон бьёт в 4 направлениях, при этом максимум два из них перекрыты другими слонами, которых и бьёт данный слон. Тогда хотя бы в двух направлениях слон бьёт свои два узла того цвета, на клетках которого слон находится. Но рассмотрим ещё угловые клетки на примере, левой нижней клетки – чёрной (см. рис). Тогда обязательно будет побит узел 1, а вот чёрные узлы 2 и 3 либо одновременно не побиты (если эта угловая клетка будет пустой), либо оба побиты, значит, один из этих узлов можно убрать из рассмотрения, как лишний. Угловых клеток 4, значит, всего рассматриваем 8476–4=8472 узлов, из которых каждый слон бьёт хотя бы два своих узла, а остальные слоны не**





бьют эти узлы. Значит, слонов не более 8472:2=4236. В качестве примера подойдут все 4236 клеток на краю, тогда слоны в угловых клетках бьют ровно одного слона, а каждый неугловой слон бьёт ровно двух слонов. *Комментарий:* *Также при доказательстве оценки можно было рассмотреть слона, как ладью на одноцветной доске, повёрнутой на 45 градусов и имеющей ступенчатую форму (см. рис.), где уже устроить подсчёт методом стенок с аналогичным убиранием четырёх лишних стенок на двух таких досках (чернопольной и белопольной). На рисунке указано, какие одноцветные клетки большой шахматной доски перейдут в какие клетки новой ступенчатой доски.*)

3–4. В треугольнике ABC, где острый угол A равен 4/3 угла B, на биссектрисе AE нашлась такая точка F, что $AF = AC$ и $2\angle ABF = \angle BAC$. Найдите угол C. **(110°. Пусть $\angle BAC=4\alpha$, $\angle FCB=\beta$, тогда $\angle ABC=3\alpha$, $\angle ACB=180°-7\alpha=\angle ACF+\beta=(180°-2\alpha)/2+\beta=90°-\alpha+\beta$, откуда $\beta=90°-6\alpha$. Пусть MK – серединный перпендикуляр к AB, M – середина AB, K лежит на стороне BC, которая больше AC в силу неравенства $\angle BAC>\angle ABC$. Тогда $\angle BAK=\angle ABK=3\alpha$, т.е. AK – биссектриса $\angle FAC$, откуда следует, что $AFKC$ – дельтоид. Значит, $\angle CFK=\angle FCK=\beta=90°-6\alpha$, но $\angle CFK=180°-\angle AFM-\angle AFC=180°-(90°-2\alpha)-(180°-2\alpha)/2=3\alpha$. Получаем уравнение $90°-6\alpha=3\alpha$, откуда $\alpha=10°$. Значит, $\angle C=180°-7\alpha=180°-7\cdot 10°=110°$.)**

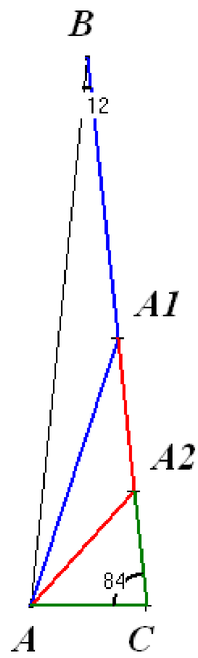


3–5. На доске написаны положительные числа $2a$, b, c и $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$. После этого среди них нашли наименьшее (одно из наименьших, если их было несколько), а остальные три числа стерли. Найдите наибольшее возможное число, которое могло остаться на доске. **($\sqrt{15}$. Предположим, что наименьшее число больше $2\sqrt{3}$, тогда $2a>\sqrt{15}$. $b>\sqrt{15}$, $c>\sqrt{15}$, но $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=\frac{4}{b}+\frac{5}{c}+\frac{6}{2a}<\frac{4+5+6}{\sqrt{15}}=\sqrt{15}$ – противоречие. Значит, наименьшее число не превосходит $\sqrt{15}$ и такое могло быть при $2a=b=c=\sqrt{15}$, тогда и сумма дробей также равна $\sqrt{15}$.)**

3–6. Высоты треугольника равны h, $2h$, kh. При каких k можно гарантированно определить углы треугольника? **($\frac{2}{3}<k<2$. Стороны треугольника равны $a=\frac{2S}{h}, b=\frac{2S}{2h}, c=\frac{2S}{kh}$, где S – площадь треугольника. Тогда по неравенству треугольника $a-b<c<a+b \Leftrightarrow$ (после деления на $\frac{2S}{h}$) $1-\frac{1}{2}<\frac{1}{k}<1+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2>k>\frac{2}{3}$. При этом для любого k из этого интервала для соответствующего набора сторон a, b, c, удовлетворяющих двойному неравенству треугольника (при любом положительном S), существует треугольник, у которого, естественно, можно однозначно определить углы.)**

4–4. Среди всех клетчатых прямоугольников найдите такой, который при разрезании на 2 клетчатых прямоугольника с периметрами 200 и 300 имеет наибольшую возможную площадь. **(Пусть длина общего разреза равна *n*, тогда вторая сторона прямоугольника равна сумме полупериметров частей за вычетом общего отрезка разреза, т.е. (100–*n*)+(150–*n*)=250–2*n*. Удвоенная площадь прямоугольника равна 2*n*·(250–2*n*) и по неравенству Коши получим, что** $\sqrt{2S}=\sqrt{2n(250-2n)}\le\frac{2n+(250-2n)}{2}=125$**, т.е. наибольшая удвоенная площадь 125^2 будет у квадрата со стороной 2*n*=125, т.е. *n* – нецелое. Но у нас клетчатый прямоугольник, значит, наибольшая площадь будет у прямоугольников <u>62×126 и 63×124</u>.)**

4–5. На стороне *BC* равнобедренного треугольника *ABC* (*AB*=*BC*) с целочисленными (в градусах) углами в направлении от *B* к *C* последовательно отмечены *n* точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ так, что $BA_1=AA_1$, $A_1A_2=AA_2$, $A_2A_3=AA_3$, …, $A_nC=AC$. Какие значения может принимать угол *BAC*? **(<u>84°</u>. Пусть $\angle BAA_1=\angle ABA_1=\alpha$, тогда $\angle A_1AA_2=\angle AA_1A_2=2\alpha$, $\angle A_2AA_3=\angle AA_2A_3=4\alpha$ и т.д. $\angle A_nAC=2^n\cdot\alpha$. Значит, $\angle BAC=\angle ACB=(\alpha+2\alpha+4\alpha+\ldots+2^n\cdot\alpha)=(2^{n+1}-1)\alpha$ и сумма углов треугольника $180°=2\cdot(2^{n+1}-1)\alpha+\alpha=(2^{n+2}-1)\alpha$, но среди уменьшенных на 1 степеней двойки (7, 15, 31, 63, 127, 255, …) только 15 при *n*=2 будет делителем числа 180. Значит, $\alpha=180°:15=12°$ и $\angle BAC=7\alpha=7\cdot12°=84°$.)**



4–6. Для скольких пар цифр *a* и *b* (*a*≥*b*) выполняется неравенство $\frac{a^2-1}{b}+\frac{b^2-1}{a}>a+b$? **(<u>28 пар</u>. Цифры не равны 0 в силу условия. Домножим наше неравенство на положительное число *ab*, сохранив знак неравенства, получив равносильное неравенство $a^3-a+b^3-b\ge ab(a+b)$. В левой части вынесем положительный множитель *a*+*b* и разделим на него, получив равносильное неравенство $a^2-ab+b^2-1>ab$, которое равносильно неравенству $(a-b)^2>1$. А оно верно только при различных ненулевых цифрах *a* и *b*, отличающихся хотя бы на 2, что даёт нам** $C_9^2-8=\frac{9\cdot8}{2}-8=36-8=28$ **случаев.)**

5–5. Сумма цифр натурального числа *A* равна 2020, а сумма цифр числа 5*A* равна 2000. Сколько нечётных цифр в десятичной записи числа *A*? **(** $n=\frac{2S(5A)-S(A)}{9}=\frac{2\cdot2000-2020}{9}=220$**. Заметим, что каждая чётная цифра даёт в свой разряд 0 и переход в следующий разряд числа, равного половине самой чётной цифры, и не больше 4 (2→10, 4→20, 6→30, 8→40). Каждая нечётная цифра даёт в свой разряд 5 и переход в следующий разряд половины от себя, уменьшенной на 1, и не больше 4 (1→5, 3→15, 5→25, 7→35, 9→45). Тогда сложение цифры, получаемой в самом разряде, и перехода из предыдущего разряда даст не более 5+4=9, что не повлечёт перехода в следующий разряд.**

Значит, $S(5A)=\dfrac{S(A)-n}{2}+5n$**, где $S(t)$ – сумма цифр исходного числа t, n – количество нечётных цифр, тогда** $n=\dfrac{2S(5A)-S(A)}{9}$ **.)**

5–6. Составное натуральное число n назовём *стабильным*, если найдётся такое натуральное k, что, каков бы ни был делитель d числа n, $1 < d < n$, число $n–kd$ — делитель n. Сколько стабильных чисел в первой сотне? **(<u>4 стабильных числа</u>. Пусть наименьший делитель числа n (отличный от 1 и n) равен простому числу p, а наибольший – $q=n/p$ (возможно, $p=q$). По условию $n–kq$ – делитель n, причём он кратен q. Но у n всего два различных делителя, кратных q – это q и $n=pq$. Значит, $pq–kq=q$, тогда $k=p–1$. По условию $n–(p–1)p$ – также делитель числа n, т.е. $n–(p–1)p \le q=n/p$. Домножим обе части неравенства на p, перенесём n налево, а затем сократим на $(p–1)>0$. Получим $n–p^2 \le 0 \Leftrightarrow n\le p^2$. Поскольку n – составное число (у него хотя бы 3 натуральных делителя – 1, p, n), а p – наименьший простой делитель, получаем, $n=p^2$ и $p=q$. Тогда для любого $n=p^2$ подойдёт $k = p–1$, дающее выполнение условия $n–(p–1)p=p$. Значит, действительно n – квадрат простого числа. А в первой сотне такими числами являются 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 – всего 4 числа.)**

6–6. Два игрока по очереди проводят непересекающиеся (внутренним образом) диагонали правильного 2020-угольника до тех пор, пока он не разобьётся на треугольники. Второй стремится сделать как можно больше треугольников, у которых 2 стороны являются сторонами исходного многоугольника, а первый – как можно больше треугольников, сторонами которого будут диагонали. Кто из игроков может обеспечить себе максимальный выигрыш (разность количеств треугольников) и какой? **(<u>Второй, выиграет ровно 2 треугольника</u> независимо от действий игроков (игра-шутка), т.к. в дереве триангуляции (вершины – треугольники, рёбра – общая сторона-диагональ) будут только вершины степени 1, 2 и 3, а в дереве количество вершин $V_1+V_2+V_3=E+1=(V_1+2V_2+3V_3)/2+1$, откуда $V_1–V_3=2$, т.е. второй всегда выиграет ровно 2 треугольника при любом многоугольнике. V_1, V_2, V_3, E – количество вершин со степенью 1, 2, 3 и количество рёбер соответственно.)**