XV Южный математический турнир.
Гранд-лига (10-11 кл).
I тур. 16.10.2020.

1. Цилиндр объёма x лежит внутри цилиндра объёма 1, а тот лежит внутри цилиндра объёма 2. Оси всех трёх цилиндров перпендикулярны. Найдите наибольшее возможное значение x.

2. По меньшей дуге AB описанной окружности остроугольного треугольника ABC движется точка X. Точка Y выбирается на стороне BC так, что AB — биссектриса угла XAY. Докажите, что окружности XYC при всевозможных положениях точки X проходят через ещё одну, отличную от C, фиксированную точку.

3. В остроугольном треугольнике ABC точки H_a, H_b, H_c — основания высот, проведенных из A, B, C соответственно. Прямая H_bH_c пересекает BC в точке D. Точки K и L выбираются на продолжениях H_aH_c и H_aH_b за точки H_c и H_b соответственно так, что прямая KL проходит через D. Докажите, что отношение длин касательных, проведённых из точек K и L к окружности, описанной около BCH_b, равно $KD : LD$.

4. Рассмотрим граф с 60 рёбрами. При каком наименьшем k его вершины можно заведомо правильно покрасить не более чем в k цветов?

   (Раскраска вершин графа называется *правильной*, если нет ребра, соединяющего две вершины одного цвета.)

5. Даны $n \geqslant 2$ натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ таких, что $a_n < 2a_1$. Пусть количество различных простых делителей числа $a_1a_2\ldots a_n$ равно m. Докажите, что
$$(a_1a_2\ldots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m.$$

6. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{bc}-1)(\sqrt{ca}-1)=1$. Какое наибольшее количество из чисел $a-\frac{b}{c}$, $a-\frac{c}{b}$, $b-\frac{a}{c}$, $b-\frac{c}{a}$, $c-\frac{a}{b}$, $c-\frac{b}{a}$ могут быть больше 1?

7. Обозначим через S_n множество всех слов длины n из букв 0, 1 и $*$. Для слов $x, y \in S_n$ скажем, что $x \preceq y$, если y получается из x заменой некоторых звёздочек на единицы и нули. Функция $f\colon S_{n+k} \to S_n$ такова, что

   (1) $x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$;

   (2) $f(***\ldots*) = **\ldots*$;

   (3) если $f(x) \preceq z$, то существует $y \succeq x$ такое, что $f(y) = z$.

   Докажите, что существует слово x, содержащее не более k звёздочек, такое, что $f(x) = **\ldots*$.

8. Пусть S — конечное множество действительных чисел. Обозначим через x_n наименьшее положительное число, полученное как сумма n членов, каждый из которых — произведение n (не обязательно различных) элементов из S. Может ли случиться, что существует бесконечно много n таких, что $x_n < 2^{-2^n}$?