**Пятнадцатый Южный математический турнир**

**Онлайн, 15-21.10.2020**

**Юниор-лига. 1 тур. 16.10.20**

1. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$, пересекающиеся в точках $P$ и $Q$, касаются одной прямой в точках $A$ и $B$ соответственно. Окружность $\Gamma$, проходящая через $A$ и $B$, пересекает $\omega_1$ и $\omega_2$ в точках $D$ и $C$ соответственно. Докажите, что $\frac{CP}{CQ} = \frac{DP}{DQ}$.

2. Даны натуральные $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 2k$. Аня и Боря по очереди (начинает Аня) закрашивают зелёным цветом по одной клетке доски $n \times n$. Выигрывает тот, после чьего хода в каждом квадрате $k \times k$ окажется хотя бы по одной зелёной клетке. Кто выиграет при правильной игре? (Ответ может зависеть от $k$ и $n$.)

3. Произведение $(1^2+1)(2^2+1)\ldots(n^2+1)$ делится на квадрат простого числа $p$. Докажите, что $p < 2n$.

4. Граф $G$ обладает следующим свойством: для любой четвёрки различных вершин $A$, $B$, $C$ и $D$, если существуют рёбра $AB$ и $CD$, то между этими вершинами есть ещё хотя бы одно ребро. Докажите, что всякий простой путь наибольшей длины в таком графе проходит через каждую вершину максимальной степени.

5. На окружности в порядке обхода расположены точки $A$, $B$, $C$, $D$ так, что сторона $AB$ четырёхугольника $ABCD$ строго больше, чем каждая из трёх других его сторон. Докажите, что $AB + BD > AC + CD$.

6. Докажите, что при каждом натуральном $n$ число решений уравнения $x+2y+2z+3w = n$ в целых неотрицательных числах равно числу решений уравнения $a + b + c + d = n$, в которых $a \geqslant b \geqslant d$ и $a \geqslant c \geqslant d$.

7. Положительные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют условию

$$(\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{bc} - 1)(\sqrt{ca} - 1) = 1.$$

Какое наибольшее количество из чисел

$$a - \frac{b}{c}, a - \frac{c}{b}, b - \frac{a}{c}, b - \frac{c}{a}, c - \frac{a}{b}, c - \frac{b}{a}$$

могут быть больше 1?

8. На полке стоят $n > 1$ книг, каждые две из которых имеют разную толщину и высоту. Книги расставлены в порядке возрастания высоты. Вася может поменять местами любые две стоящие рядом книги, если левая из них толще и ниже, чем правая. Докажите, что вне зависимости от порядка Васиных действий через конечное число шагов Вася будет вынужден прекратить свою деятельность, и книги будут стоять в порядке возрастания толщины.