XV Южный математический турнир.
Гранд-лига (10-11 кл).
II тур. 17.10.2020.

1. Какое наименьшее количество спутников надо запустить над шарообразной планетой, чтобы в некоторый момент с каждой точки поверхности планеты были доступны сигналы хотя бы двух спутников? Спутник считается доступным из точки A поверхности планеты, если он находится относительно касательной плоскости, проведенной в точке A, строго по другую сторону, нежели сама планета.

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, описанный вокруг окружности ω. Окружность Ω проходит через A, C и касается вписанных окружностей треугольников ABC и CDA. Докажите, что на прямой AC найдется точка X такая, что существует гомотетия с центром в X, переводящая ω в Ω.

3. Дан треугольник ABC, Ω — его описанная окружность, S — точка на дуге BC, не содержащей A, а P — точка внутри треугольника такая, что $\angle BAS = \angle PAC$. Через точку P проводится переменная прямая p, не пересекающая отрезка BC. Пусть p пересекает Ω в точках M и N, а прямые SM и SN пересекают BC в точках K и L. Докажите, что всевозможные окружности (SKL) проходят через фиксированную точку.

4. По кругу расставлены $3n$ красных точек ($n > 1$ — натуральное число). Каждую минуту Иван соединяет отрезком какие-нибудь две ещё не соединённые точки, а Митрофан перекрашивает какую-нибудь красную точку в зелёный цвет. Докажите, что, как бы ни ходил Митрофан, Иван может добиться, чтобы через n минут не менее $\frac{n-1}{6}$ отрезков соединяли красные точки с зелёными.

5. Дано натуральное n. В клетки доски $n \times n$ вписаны квадраты попарно различных натуральных чисел. При каком наибольшем k всегда выполнено следующее условие: модуль разности некоторых двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках, не меньше k?

6. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задана условиями: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$,
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$$
при $n \geqslant 3$. Пусть $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ — несократимая дробь (p_n и q_n — натуральные). Найдите все простые числа p, для которых найдётся натуральное n такое, что q_n делится на p.

7. Дано натуральное число n. Найдите наименьшее c такое, что для любых положительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n, произведение которых равно 1, справедливо неравенство
$$\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\} \leq c.$$
($\{x\}$ обозначает дробную часть числа x.)

8. Пусть a, b, c, d — натуральные числа такие, что НОД(a, b) = НОД(c, d) = 1. Рассмотрим последовательности $x_n = an + b$, $y_n = cn + d$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что никакое из чисел x_n, y_n не делится на квадрат натурального числа, большего 1.