XV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лига «Старт» (8 класс).
17 октября 2020. Второй тур.

1. В ряд выписаны 2020 чисел, каждое из которых равно 1 или −1. Для любого числа в ряду можно найти начинающийся с этого числа или заканчивающийся этим числом отрезок из нескольких подряд стоящих чисел (может быть, одного), сумма которых неположительна. Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 30°, \angle C = 90°$). Серединный перпендикуляр к гипотенузе AB пересекает биссектрису BK в точке E. Серединный перпендикуляр к отрезку EK пересекает катет BC в точке D. Найдите отношение $EK : DE$.

3. Найдите все тройки действительных чисел (x, y, z), для которых справедливо неравенство

$$2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1} \geq xy + yz + xy$$

4. Докажите, что рёбра связного графа можно окрасить в два цвета так, так, что в каждой вершине количества выходящих из неё ребер первого и второго цвета отличаются не более, чем на 1.

5. Можно ли какие-нибудь 10 последовательных натуральных чисел расположить на каркасе тетраэдра — по одному в вершинах и по одному в серединах рёбер — так, чтобы суммы чисел на каждой грани были одинаковыми?

6. Назовём простые числа a и b «*двоюродными близнецами*», если они отличаются на 4. Найдите все двоюродные близнецы, для которых $a + 100$ и $b + 100$ также двоюродные близнецы.

7. В однокруговом футбольном турнире участвовало *n* команд. Каждая набрала столько очков, сколько ничьих случилось во всех матчах без её участия. Докажите, что *n* чётно.

8. Из вершин A и C треугольника ABC проведены медианы AM и CN, а также опущены высоты AP и CQ. Обязательно ли этот треугольник равнобедренный, если $MP = NQ$?