XV Южный математический турнир.
Гранд-лига (10-11 кл). III тур. 19.10.2020.

1. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Рассматривается переменная дуга окружности Ω, проходящая через точки A и D и лежащая в той полуплоскости относительно AD, которая не содержит четырехугольник $ABCD$. Прямые, проходящие через B и C, касаются Ω в точках X и Y соответственно, причем луч BA лежит внутри угла XBD, а луч CD лежит внутри угла YCA. Докажите, что все прямые XY проходят через фиксированную точку, не зависящую от Ω, либо все параллельны.

2. Пусть $ABCDE$ – выпуклый пятиугольник, A_1 – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $BCDE$, аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1, E_1. Известно, что три из прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что две другие прямые и одна из первых трех тоже пересекаются в одной точке.

3. С замкнутой ломаной $A_1A_2\ldots A_n$ можно проделать операцию — провести диагональ вида $A_{i-1}A_{i+1}$ (вершины нумеруются циклически по модулю n) и заменить A_i на точку A_i', симметричную A_i относительно прямой $A_{i-1}A_{i+1}$. Операция называется *корректной*, если из несамопересекающейся ломаной $A_1A_2\ldots A_n$ получается также несамопересекающаяся ломаная $A_1A_2\ldots A_i'\ldots A_n$. Верно ли утверждение: „для любого n из любой несамопересекающейся замкнутой ломаной $A_1A_2\ldots A_n$ несколькими корректными операциями можно получить границу выпуклого n-угольника“?

4. В городе живут 2020 человек, двое из которых (А и В) баллотируются в мэры. Голосуют все жители по очереди, причём начинается голосование с того, что каждый кандидат голосует за себя. У каждого из остальных жителей города есть своё иррациональное число a. Каждый знает результаты голосования к моменту, когда он голосует, и: если доля голосов, поданных за А к текущему моменту, меньше a, он голосует за А, иначе — за В. Статист, зная числа a для каждого жителя (но не зная очерёдности; зная только, что начинают А и В), заранее предсказывает исход выборов, называя процент голосов, поданных за А. С какой наибольшей точностью статист гарантированно (не зависимо от чисел a) может предсказать исход выборов (в %)? (Точность — это модуль разности между прогнозом и истинным результатом.)

5. Даны положительные вещественные числа a, b, c, d. Найдите максимальное значение выражения
$$f(x)=\frac{a+bx}{b+cx}+\frac{b+cx}{c+dx}+\frac{c+dx}{d+ax}+\frac{d+ax}{a+bx},$$
для неотрицательных x.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что НОД$(a, b, c) = 1$ и они являются длинами сторон некоторого треугольника. При этом числа
$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$
также целые. Докажите, что одно из чисел
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b), \quad 2(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$
является точным квадратом.

7. Дана таблица с тремя строками и 100 столбцами. Изначально в левой клетке каждой строки стоит $400\cdot 3^{100}$ фишек. За один ход Петя отмечает некоторые фишки в таблице (хотя бы одну), а затем Вася выбирает одну из трех строк. После этого все отмеченные фишки в выбранной строке сдвигаются на клетку вправо, а все отмеченные фишки в других строках удаляются из таблицы. Петя выигрывает, если одна из фишек выходит за правый край таблицы; Вася выигрывает, если все фишки удалены. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tau(n)$ количество натуральных делителей числа n. Докажите, что существует несчётное множество функций $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таких. что $f(f(n)) = \tau(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.