XV Южный математический турнир.
Гранд-лига (10-11 кл).
Финал. 20.10.2020.

1. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причём $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$. Хорда PQ окружности ω_1 пересекает ω_2 в точке R. Касательные к ω_1, проведенные в точках P и Q, пересекаются с прямой RO_2 в точках X и Y. Докажите, что окружность, описанная около треугольника XAY, касается ω_1.

2. В треугольнике ABC выбираются точки P и Q. Прямые AQ, BQ и CQ пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Оказалось, что прямые PA_1, PB_1 и PC_1 перпендикулярны сторонам BC, AC и AB соответственно. Докажите, что на прямой PQ лежит центр описанной окружности треугольника ABC.

3. Выпуклый шестивершинник P вписан в сферу единичного радиуса с центром O. Он содержит шар с центром O и радиусом $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Докажите, что P — правильный октаэдр.

4. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств n-элементного множества X. Известно, что любое множество в $\mathcal{F}$ имеет некратную трём мощность, и и вместе с любыми двумя множествами $\mathcal{F}$ содержит их пересечение. Кроме того, любая пара элементов из X лежит хотя бы в одном множестве из $\mathcal{F}$. Докажите, что n не делится на 3.

5. Натуральное число p назовём *абсолютно простым*, если для любого натурального k такого, что $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{p}$, выполнено неравенство $\left\{\dfrac{p}{k}\right\} \geqslant 0{,}01$. Конечно ли множество абсолютно простых чисел?

6. Бесконечные возрастающие последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ таковы, что каждое натуральное число лежит ровно в одной из них, и $a_n = b_n + b_{2n} + \cdots + b_{10n}$ при всех натуральных n. Докажите, что существует бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $n_1, n_2, \ldots$, состоящая из натуральных чисел, такая, что последовательность $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots$ — также арифметическая прогрессия.

7. Даны натуральные числа m и n и вещественное число a. Докажите, что существуют многочлены $f(x, y)$ и $g(x, y)$ с целыми коэффициентами такие, что
$$a = \frac{f(a^m, (1-a)^n)}{g(a^m, (1-a)^n)}.$$

8. На турнире по командной игре в сет участники команды A договорились и распределили между собой n различных номерков. Такие же n номерков распределили между собой участники команды B. Каждая из команд состоит из 15 человек. Те участники, у которых номерки совпадают, играют друг с другом. Если совпало несколько номерков, то игроки играют друг с другом количество игр, равное количеству совпадающих пар. Оказалось, что если какие-то два игрока из команд A и B не играли друг с другом, то суммарно эти два игрока сыграли не менее 20 игр. Найдите наименьшее n, при котором такая ситуация возможна.