Пятнадцатый Южный математический турнир

Онлайн, 15-21.10.2020

Юниор-лига. 4 тур. 20 октября 2020 г.

1. Назовём *галочкой* два разных ребра графа, имеющие общую вершину. В графе 100 вершин и n ребёр. При каком наименьшем n можно наверное утверждать, что в этом графе есть 100 галочек без общих ребёр?

2. В последовательности (a_i) число a_1 целое, $a_{k+1} = a_k^2 - a_k - 1$. Докажите, что числа a_{n+1} и $2n+1$ взаимно просты.

3. Точки P и Q – середины диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно, а O – точка пересечения этих диагоналей. Отрезок, соединяющий середины AB и CD, пересекает AC и BD в точках E и F соответственно. Докажите, что $OE \cdot QF = OF \cdot PE$

4. В каждой клетке квадратной таблицы $2N \times 2N$ проведены два непересекающихся отрезка без общих концов, соединяющих середины двух соседних сторон клетки. Они образовали несколько путей без общих точек. Какое наибольшее количество путей могло получиться?

5. Делитель d натурального числа n назовём *центральным*, если $\sqrt{n} < d < 2\sqrt{n}$. Может ли у натурального числа быть ровно 2020 центральных делителей?

6. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причем $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$. Хорда PQ окружности ω_1 пересекает ω_2 в точке R. Касательные к ω_1 проведенные в точках P и Q пересекаются с прямой RO_2 в точках X и Y. Докажите, что окружность описанная около XAY касается ω_1.

7. Найдите наименьшее возможное n, для которого существуют два разбиения $A_1, A_2, ...A_{10}$ и $B_1, B_2, ...B_{10}$ n-элементного множества такие, что если для каких-то i, j $A_i \cap B_j = \varnothing$, то $|A_i \cup B_j| \geqslant 10$.

8. Докажите, что положительный корень уравнения

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+2020) - 1 = 0$$

меньше $\frac{1}{2020!+6}$.