XV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лига «Старт» (8 класс).
20 октября 2020. ФИНАЛ.

1. У каждого из n^2 правильных треугольников со стороной 1 одна сторона – белая, одна – красная и одна – синяя. Разрешается прикладывать треугольники друг другу либо белыми сторонами, либо совмещать красную с синей. Из треугольников сложили большой треугольник со стороной n. Докажите, что на его границе белых, синих и красных отрезков поровну.

2. a, b, c – положительные действительные числа, такие что $abc = 8$. Докажите неравенство

$$\frac{ab+4}{a+2}+\frac{bc+4}{b+2}+\frac{ca+4}{c+2}\geq 6$$

3. Есть три кучи по 100 камней. Играют двое, ходят по очереди. За один ход можно взять камень из любой кучи, кроме той, из которой перед этим взял камень противник. Выигрывает тот, кто не может сделать хода. У кого из игроков (первого или второго) есть выигрышная стратегия?

4. Окружность, имеющая центром точку I, вписана в треугольник ABC. Обозначим через C' и A' точки касания окружности со сторонами AB и BC соответственно. Прямая c, проходящая через C' параллельно биссектрисе угла A, пересекается с прямой a, проходящей через A' параллельно биссектрисе угла C, в точке P. Докажите, что прямая IP перпендикулярна прямой AC.

5. Натуральное число $n > 1$ и простое число p таковы, что $p - 1$ кратно n, а $n^6 - 1$ кратно p. Докажите, что $p - n$ или $p + n$ является точным квадратом.

6. В каждой клетке доски 11×11 стоит хамелеон. Каждый из хамелеонов окрашен в красный или синий цвет. За один ход можно указать на 4-х хамелеонов, стоящих в квадрате 2×2 и каждый из них поменяет свой цвет – с красного на синий или с синего на красный. Докажите, что существует, по крайней мере, миллион различных комбинаций раскрасок хамелеонов, ни одну из которых нельзя получить из другой за несколько таких ходов.

7. Назовём *галочкой* два ребра графа, имеющие общую вершину. В графе 100 вершин и n рёбер. При каком наименьшем n можно наверняка утверждать, что в этом графе есть 100 *галочек* без общих рёбер?

8. В остроугольном треугольнике ABC $AB < AC$. Серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. H – ортоцентр треугольника ABC, M и N – середины отрезков BC и PQ соответственно. Докажите, что HM и AN пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.