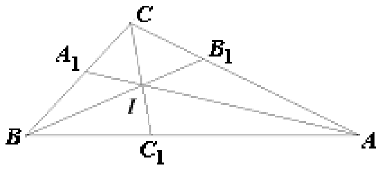
1. На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы – лгут) в математической игре участвовали 18 команд по 4 человека в каждой команде. Капитан каждой команды заявил, что по крайней мере в трёх командах есть рыцари. Какое количество рыцарей могло участвовать в этой игре? **(От 0 до 6 и от 18 до 72 рыцарей. Если хотя бы один капитан лжёт, то рыцари присутствуют максимум в двух командах и при этом нет капитанов-рыцарей. Тогда рыцарей не более 6 (максимум по 3 в двух командах), причём каждый вариант реализуется. Если же нет капитана-лжеца, то рыцарей уже не менее 18 (все капитаны), причём каждый из вариантов от 18 до 72 рыцарей реализуется.)**

2. В треугольнике ABC, углы которого относятся как $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$, провели все биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, которые пересекаются в точке I. Сколько равнобедренных треугольников можно выделить на получившемся чертеже? Укажите все эти треугольники. **(5. Подсчёт углов показывает, что такими треугольниками являются ICB_1, B_1BA, BIC_1, ICA_1, C_1CB.)**



3. Какие значения может принимать НОД (наибольший общий делитель) десяти попарно различных натуральных чисел, сумма которых равна 1000? **(1, 2, 4, 5, 8, 10. Пусть их НОД равен d. Упорядочим наши числа по возрастанию $d\cdot a_1<d\cdot a_2<\ldots<d\cdot a_{10}$, тогда их сумма $1000=d\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{10})\geq d\cdot(1+2+\ldots+10)=55d$. Значит, $d\leq 1000:55$, кроме того, является ещё и делителем числа 1000. Такими числами будут 1, 2, 4, 5, 8, 10. Для каждого из этих вариантов есть свой пример набора чисел d, $2d$, $3d$, …, $9d$, $(1000:d-45)\cdot d$.)**

4. Пусть a, b, c – три попарно различные ненулевые цифры. Из них составили шесть различных чисел, в каждом из которых каждая из этих цифр встречается только один раз. «*Крайними*» из этих шести чисел назовём наибольшее и наименьшее из них. Известно, что число $\overline{abc}$ – не крайнее. Какие ещё числа гарантированно являются не «крайними»? **($\overline{cba}$. Если $\overline{cba}$ – наибольшее, то $c>b>a$, но тогда число $\overline{abc}$ – наименьшее и, значит, не крайнее. Если $\overline{cba}$ – наименьшее, то $c<b<a$, но тогда число $\overline{abc}$ – наибольшее и, значит, не крайнее. Осталась одна возможность $\overline{cba}$ – не крайнее. Все четыре остальных числа могут быть крайними при разных вариантах упорядоченности цифр.)**

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xyz + 2x + 3y + 6z = xy + 2xz + 3yz$? **(10. Уравнение равносильно следующему: $(x–3)(y–2)(z–1) = -6$. Десять решений последнего уравнения получаются из трёх возможных здесь разложений на целые множители числа (-6): $(-1)\times2\times3$, $(-2)\times1\times3$, $(-1)\times1\times6$.)**

6. Из какого числа равносторонних треугольников со стороной 1 может состоять шестиугольник, все углы которого равны 120°, а все стороны различны и равны шести числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, стоящим в произвольном порядке? **(67 и 65. Такой шестиугольник получается из правильного треугольника отрезанием трёх острых углов, тогда сумма любых двух соседних сторон шестиугольника равна сумме двух противоположных им сторон. В результате рядом с 6 не могут находиться 5, 4, а также 2 и 3 одновременно, значит, возможны с точностью до симметрии ровно 2 варианта порядка сторон - (6, 1, 4, 5, 2, 3) и (6, 1, 5, 3, 4, 2), получаемых из треугольников со сторонами 10 и 9 отрезанием треугольников со сторонами 1, 5, 3 и 1, 3, 2 соответственно. Тогда количества треугольников в этих шестиугольниках равны $10^2-1^2-5^2-3^2=65$ и $9^2-1^2-3^2-2^2=67$.)**

7. Известно, что $x > y > 0$ и $2(x+y)\geq 5\sqrt{xy}$. Найдите наименьшее значение выражения $(x–4y)$. **(0. Обозначим $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}>1$, тогда наше неравенство равносильно неравенству $2(t^2+1)\geq 5t$, откуда $t\geq 2$ и $x\geq 4y$. Значит, наименьшее значение выражения $(x–4y)$ равно 0, при этом оно достигается, например, при $x=4$, $y=1$.)**

8. Сколько существует раскрасок доски 8×8 (жёстко закреплённой) таких, что при перестановке строк местами и столбцов местами можно получить доску с шахматной раскраской? Ответ дать числом в десятичной записи. **($C_8^4\cdot C_7^4=70\cdot 35=2450$. Каждая раскраска определяется раскраской клеток в левом столбце - C_8^4 вариантов, а затем уже в нижней строке - C_7^4.)**