Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Четвертый тур. Премьер-лига. Бои за 5–8 места. 7 октября 2021 г.

1. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 100×100 на равное количество прямоугольников 2×4 и 1×8?

2. Найдите наибольшее вещественное α, для которого существует возрастающая последовательность нечётных натуральных чисел $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \ldots$ со следующим свойством: для каждого n число a_n – наибольшее натуральное число, строго меньшее αa_{n+1}.

3. Вершины 997-угольника пусты. Два игрока по очереди ставят нули и единицы в его вершины, не снабженные числами ранее. Первый игрок начинает игру и выигрывает, если ему удаётся поставить три одинаковых числа в три последовательных вершины. Второй игрок выигрывает, если к моменту, когда все вершины снабжены числами, первый игрок не добился своей цели. Кто выиграет при правильной игре?

4. Существуют ли несколько положительных рациональных чисел, и сумма, и произведение которых равны 7?

5. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D – прямые, а $BC = AB + CD$. Точка E на прямой AB такова, что A лежит между E и B и $EA = 4CD$. Докажите, что угол EDB – прямой.

6. Даны различные натуральные числа m и n. В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены все натуральные числа по одному разу. Докажите, что на плоскости можно выделить два прямоугольника $m \times n$ (расположенных как угодно), в которых одно и то же наибольшее число.

7. В треугольнике ABC проведены медианы BN и CM. Касательная в точке N к описанной окружности треугольника AMN пересекает сторону BC в точке S. Докажите, что прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников BMS и AMN, перпендикулярна CM.

8. Назовём набор шариков *радующим глаз*, если в нём есть шарики трёх и более цветов. Имеется 100 шариков. Известно, что, как бы их ни раскладывать на 25 наборов по 4 шарика, хотя бы один из наборов будет радовать глаз. Какое наименьшее количество цветов может встречаться у этих 100 шариков?