Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Финал. Премьер-лига. 8 октября 2021 г.

1. Разбиение выпуклого многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники назовём *прекрасным*, если после удаления любого треугольника ровно у одного из получившихся многоугольников оказывается нечётное число вершин. Докажите, что разбиение прекрасно тогда и только тогда, когда из него можно удалить часть диагоналей, получив разбиение исходного многоугольника на четырёхугольники.

2. Точка I – центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC. Биссектрисы BI и CI пересекают высоту ABC, проведенную из A, в точках U и V соответственно. Окружность, построенная на AI, как на диаметре, вторично пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке T, а описанная окружность треугольника TUV пересекает отрезок BC и ω в точках P и Q соответственно. Прямая PQ вторично пересекает ω в точке R. Докажите, что $AR \parallel BC$.

3. Девиз великого хана – последовательность, состоящая из букв А и Б. Хан повелел своему зодчему написать на стене строку из n букв так, чтобы в максимально возможном количестве мест можно было прочитать девиз хана, образованный стоящими подряд буквами. Хану показалось, что девиз читается в недостаточном числе мест, и он велел архитектору сбить буквы и удлинить стену так, чтобы можно было написать на одну букву больше. Число способов прочитать девиз увеличилось, но хан всё ещё не был доволен: он повелел снова сбить буквы и достроить ещё кусок стены так, что стало можно написать ещё на одну букву больше. Число способов прочитать девиз стало ещё больше, и хан щедро наградил архитектора. Докажите, что в девизе великого хана все буквы одинаковы.

4. Дано натуральное число n. Последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел называется *хорошей*, если $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_i^3 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_i)^2$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что количество различных хороших последовательностей не больше, чем $3^{n-1} + 2^{n-1}$. (Последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ считаются различными, если $x_i \neq y_i$ хотя бы для одного $i = 1, 2, \ldots, n$.)

5. В графе любые два треугольника имеют хотя бы одну общую вершину, а среди любых четырёх вершин есть две несмежных. Докажите, что можно удалить несколько несмежных между собой вершин (возможно, ноль или одну) так, чтобы не осталось ни одного треугольника.

6. Существуют ли на плоскости 100 точек такие, что любая из этих точек является центром описанной окружности треугольника с вершинами в каких-то трёх из этих точек?

7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b + c + \frac{1}{abc} = \frac{19}{2}$. При каком наибольшем a это возможно?

8. Докажите, что среди чисел 2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, $\ldots$, 2^{3n} найдутся два, записи которых в троичной системе счисления имеют одинаковую сумму цифр.