XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Бои за 5-8 места. Гранд-лига. 27.09.2024.

1. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$ числа такие, что $n > m$ и числа $n^2 + r$, $m^2 + r$ являются степенями 2. Докажите, что $n > \frac{2m^2}{r}$.

2. Пусть n — натуральное число. Даны $2n$ различных прямых на плоскости, среди которых нет двух параллельных. Некоторые n из этих $2n$ прямых покрашены синим, а оставшиеся n прямых покрашены красным. Через B обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной синей прямой, а через R обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной красной прямой. Докажите, что существует окружность, которая с каждым из множеств B и R имеет ровно по $2n - 1$ общих точек.

3. Петя и Вася играют на доске $n \times n$, начинает Петя. Каждый игрок выбирает столбец или строку и красит её в свой цвет (не обращая внимание на предыдущие цвета). Один и тот же столбец или строку нельзя выбирать дважды. Петя хочет, чтобы после n ходов Пети и n ходов Васи клеток его цвета было как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться при правильной игре?

4. Две окружности ω, ω' пересекаются в точках B, B'. Проводятся пары параллельных прямых l, l', симметричных относительно BB' и пересекающих ω, ω' соответственно. Пусть D это та из двух точек пересечения ω и l, что лежит по одну сторону относительно линии центров окружностей ω и ω' с точкой B. Пусть E это та из двух точек пересечения ω' и l', что лежит по одну сторону относительно линии центров окружностей ω и ω' с точкой B'. Касательная к ω в D и касательная к ω' в E пересекаются в точке X. Докажите, что X лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора l и l').

   (П. Кожевников, М. Дидин)

5. В правильном 2024-угольнике проведены все стороны и диагонали. Петя задумал расстановку стрелок на этих отрезках, а Вася пытается её отгадать. За ход Вася указывает на несколько вершин, а Петя отвечает, из каких из них можно попасть в какие, двигаясь по стрелкам между выбранными вершинами. Например, Вася может спросить про 2 вершины и узнать положение стрелки между ними, всего при такой стратегии ему потребуется $2023 \cdot 1012$ ходов. Как Васе узнать расположение всех стрелок за $2023 \cdot 506$ ходов?

   (М. Дидин)

6. Последовательность $\{a_n\}$ целых неотрицательных чисел такая, что при всех $n \geq 0$ верно, что $a_{2n} = 2a_n$, $a_{4n+1} = 4a_n + 3$, $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} - 1$. Докажите, что все члены $\{a_n\}$ различны.

7. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC,M — середина стороны BC и W — середина дуги BAC окружности (ABC). Пусть WH повторно пересекает (ABC) в точке K. Пусть K' — точка, симметричная K относительно биссектрисы угла A. Докажите, что три окружности (ABC), (WHM), (AHK') пересекаются в одной точке.

   (Д. Игнатьев)

8. Обозначим через $\mathbb{R}_{\geq 0}$ множество неотрицательных действительных чисел. Найти все функции $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ верно $2x^3zf(z) + yf(y) \geq 3yz^2f(x)$.

9. Король плоского государства хочет построить в своей стране n триумфальных арок, пронумерованных числами от 1 до n. Для некоторых пар номеров он заранее задал расстояние между соответствующими им арками. Известно, что существует две арки с заданным между ними расстоянием, после постройки которых у короля будет ровно k способов построить оставшиеся арки. Докажите, что после постройки любых двух арок у короля будет не более k способов построить оставшиеся.

   (Л. Шатунов)

10. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что $F(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ для любого целого n. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что для любого целого n значение $F(n)$ будет делиться на него.